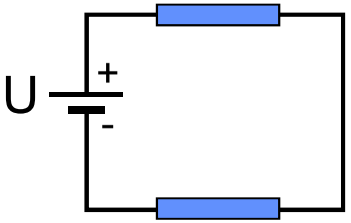
5 Elektrizitätslehre

Grundbegriffe:

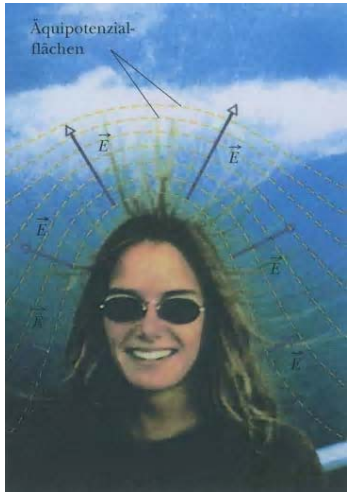
Ladung, Coulomb-Kraft, Spannung, Strom, Widerstand, Arbeit, Energie, Potential, Leistung

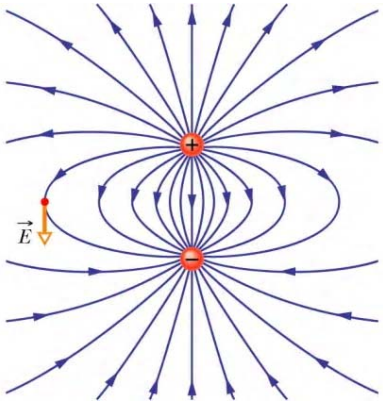
Elektrische Netzwerke



Elektrisches Feld

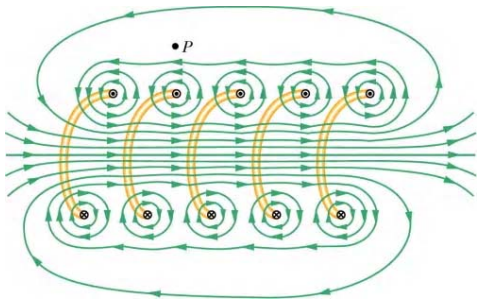
Feldstärke, Dipol, Potential, Kondensator, Materie im Feld / Polarisation





Magnetfeld

Felder von Strömen, Lorentz-Kraft, magn. Dipol, Spule, Induktion



Wechselfelder

Wechselstromwiderstand, elektromagnetische Wellen

5.1 Grundbegriffe: Spannung (Potentialdiff.)

Ladung

Coulomb-Kraft

Verschiebungsarbeit W und potentielle Energie

Potential und Spannung

5.1 Grundbegriffe: Spannung (Potentialdiff.)

Vergleich mit Mechanik (E_{pot} im Gravitationsfeld)

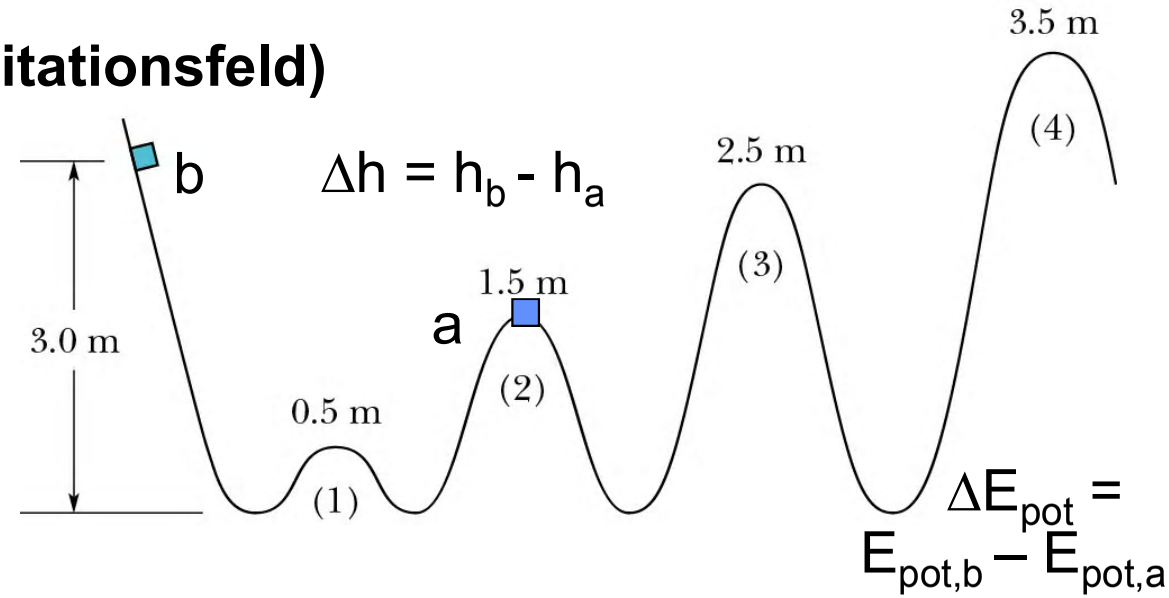
Motivation für Potential:
trenne Eigenschaften des **Probe-Körpers** von denen des **Systems**.

Die pot. Energie bezieht sich auf ein Teilchen mit Masse m bzw. Ladung q in einem System.

$$\Delta E_{pot} = (g \cdot \Delta h) \cdot m_1$$

$$\Delta E_{pot} = U_{ab} \cdot q_1$$

Die Potentialdifferenz g*Δh (bzw. $U_{ab}=\Delta\varphi$) ist eine Eigenschaft des Systems, unabhängig von m und q des Probe-Teilchens.



mechanische Potentialdifferenz
= Differenz der potentiellen Energie / Masse

Elektrische Spannung U_{ab} (oder Potentialdiff.)
= Differenz der potentiellen Energie / Ladung

Die Potentialdifferenz „g*Δh“ (bzw. $U_{ab}=\Delta\varphi$) zwischen zwei Punkten r_a und r_b gibt den Unterschied zwischen der potentiellen Energie bei r_a und r_b für eine **Probemasse m_1** (bzw. Ladung q_1) an.

5.1 Grundbegriffe: Spannung (Potentialdiff.)

Elektrische Spannung U (= Potentialdifferenz)

$$W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{pot}^{b} - E_{pot}^{a}$$

$$|F| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Die elektrische Spannung U_{ab} (oder einfach U) zwischen zwei Punkten r_a und r_b gibt den Unterschied zwischen der potentiellen Energie bei r_a und r_b für eine **Probeladung q_1** an (Potentialdifferenz).

$$\boxed{U_{ab} = \frac{W}{q_1} = \frac{1}{q_1} \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} (-\vec{F}) \cdot d\vec{r}}$$

$$\boxed{\Delta E_{pot} = U_{ab} \cdot q_1}$$

Einheit: 1 J/C = 1 Nm/C
= 1 V (*Volt*)

elektrische Spannung (oder Potentialdifferenz)
= Differenz der potentiellen Energie / Ladung

Die Spannung U (bzw. Potentialdifferenz $\Delta\varphi$) kann man in Analogie zur Druckdifferenz Δp in der Hydrodynamik verstehen. Beide können **nicht für einen** Punkt angegeben werden, sondern nur als Differenz **zwischen** 2 Punkten.

5.1 Grundbegriffe: Spannung (Potentialdiff.)

Ladung

Coulomb-Kraft

Verschiebungsarbeit W und potentielle Energie

Potential und Spannung

einfachstes *Beispiel*: Potential einer einzigen Punktladung

$$U_\infty(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(-\frac{1}{r} - \overbrace{\left(-\frac{1}{\infty}\right)}^{\approx 0}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

Potential einer Punktladung –

Punktladung q am Ort $r = 0$

$$U_\infty(r) = \varphi(r) - \underbrace{\varphi(\infty)}_{=0} = \varphi(r)$$

$$U_\infty(r) = \frac{1}{q_1} \cdot \int_\infty^r -F \, dr$$

$$= \frac{1}{q_1} \cdot \int_\infty^r -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q}{r^2} \, dr$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_\infty^r \frac{1}{r^2} \, dr$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left[-\frac{1}{r} \right]_\infty^r$$

r^{-2}

$f(r) = -r^{-1}$

$\frac{df(r)}{dr} = +1 r^{-2}$

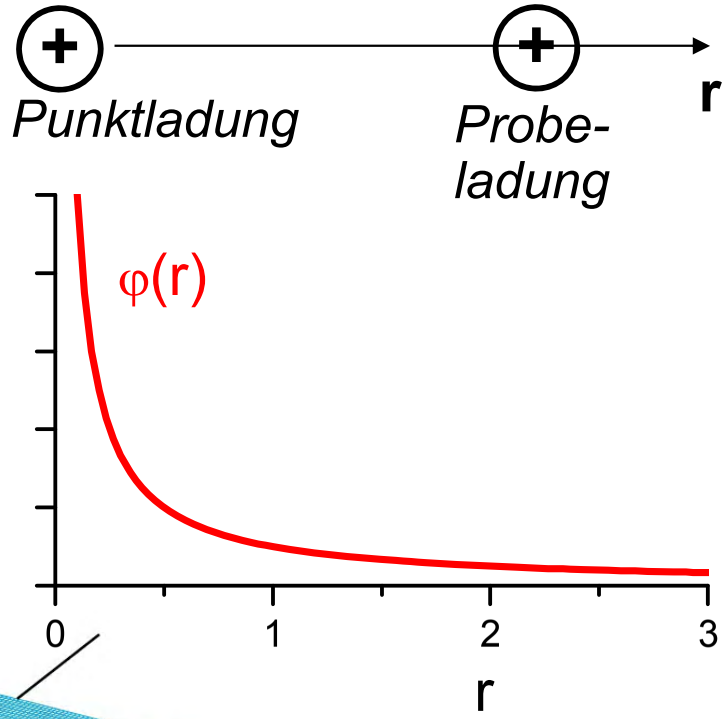
5.1 Grundbegriffe: Spannung (Potentialdiff.)

***Bsp.:* Potential einer Punktladung q bei r = 0**

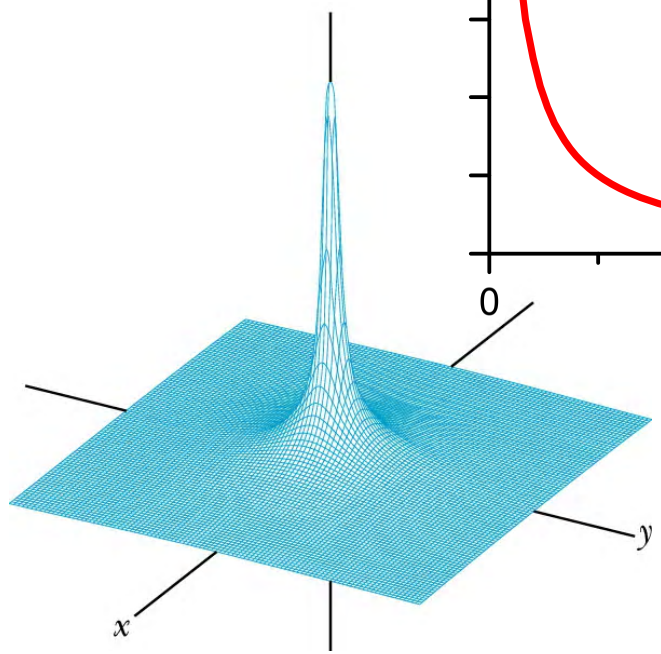
Oft wählt man einen festen **Bezugspunkt** und gibt die Spannung gegenüber diesem Punkt an. Hier bietet sich **r = ∞** an, mit **φ(∞)=0**.

Dann gilt:

$$W = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \ldots \Rightarrow \boxed{\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}}$$



Je näher q_1 (> 0) an q > 0 herankommt, desto größer wird die potentielle Energie.



Coulomb-Potential : φ(r)∝ q/r

5.1 Grundbegriffe: Spannung (Potentialdiff.)

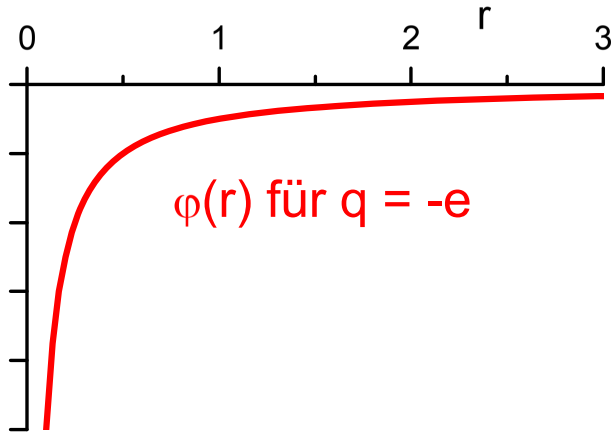
***Bsp.:* Potential einer Punktladung q bei r = 0**

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(-e)}{r}$$

chemische Bindung für q < 0

anziehendes 1/r Potential.

(Abstoßung für sehr kleine r durch Überlapp der (inneren) Schalen)



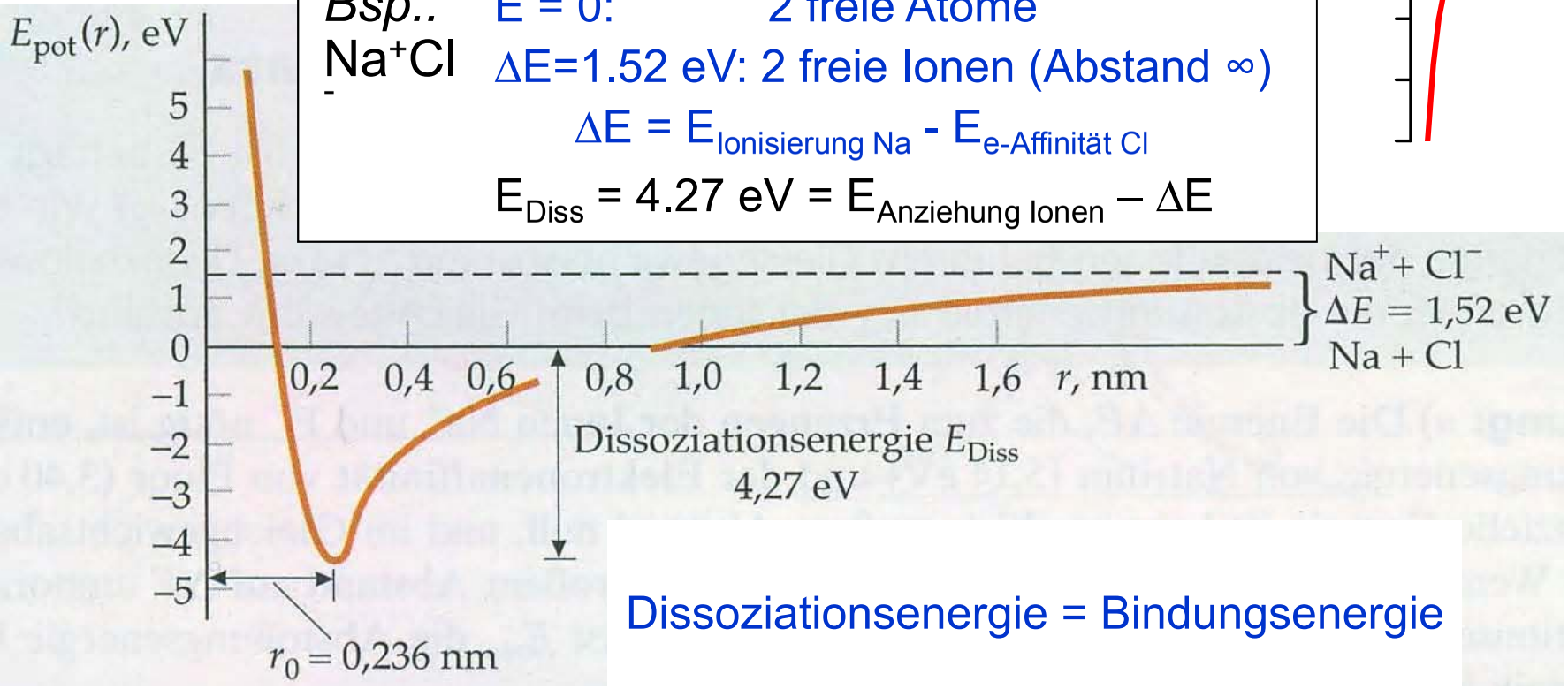
Bsp.: Na^+Cl^-

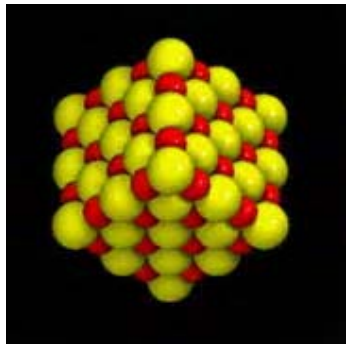
E = 0: 2 freie Atome

ΔE=1.52 eV: 2 freie Ionen (Abstand ∞)

$\Delta E = E_{\text{Ionisierung Na}} - E_{\text{e-Affinität Cl}}$

$E_{Diss} = 4.27\ \text{eV} = E_{\text{Anziehung Ionen}} - \Delta E$





Dissoziationsenergie = Bindungsenergie

5.1 Grundbegriffe: Spannung (Potentialdiff.)

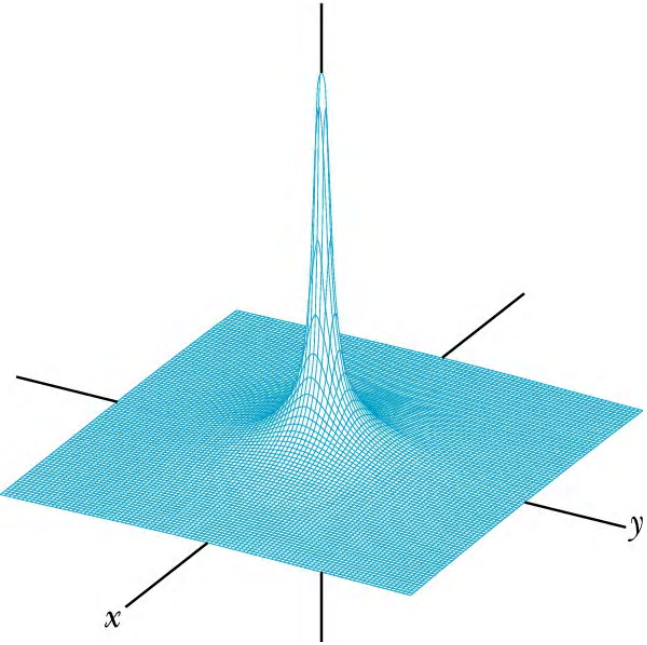
Äquipotentialflächen (= Flächen gleichen Potentials)

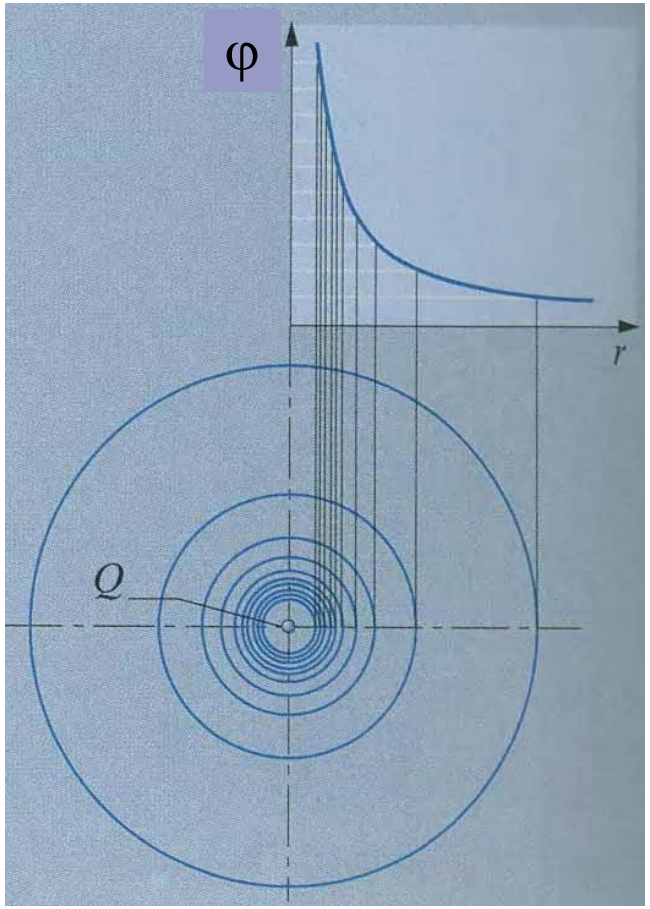
(oder Linien):

Flächen mit φ = const

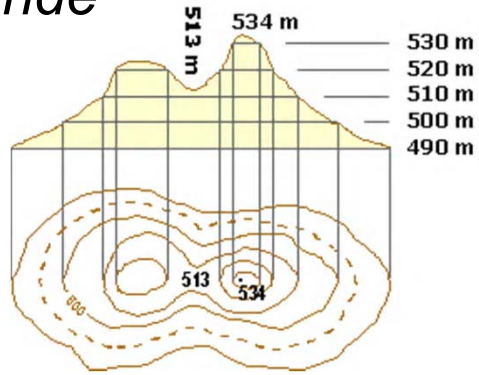
Bsp. Punktladung: Kugelschalen (in 2D: Kreise)

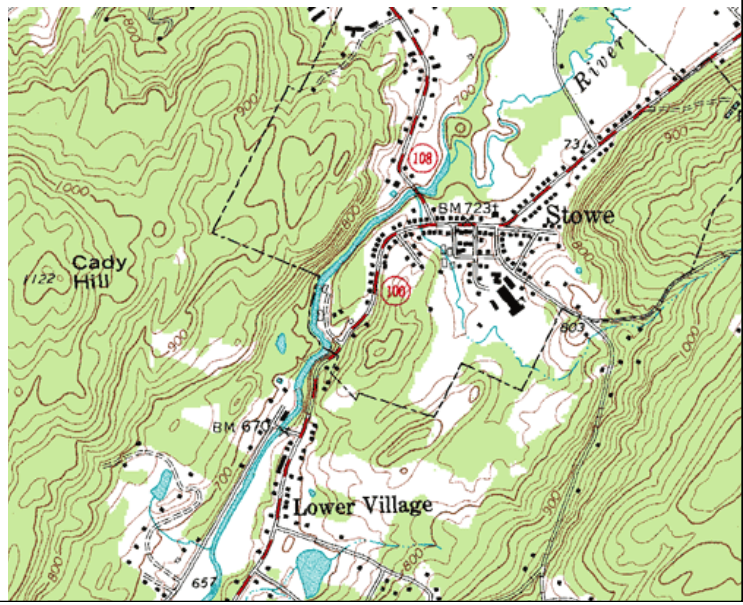
$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$





Analog: Höhenlinien im Gelände





5.1 Grundbegriffe: Einheit eV

Energie-Einheit 1 eV:

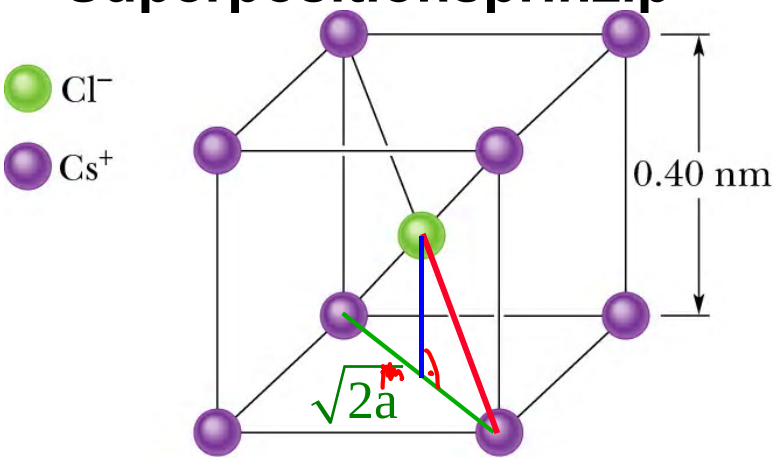
1 eV ist die nötige Energie, um eine Elementarladung 1e (bzw. 1 Elektron) gegen die Spannung 1 V zu verschieben, d.h. um seine potentielle Energie um ΔE_{pot} = 1V * 1.602 10^{-19} C = 1.602 10^{-19} J zu erhöhen.

$$\boxed{U_{ab} = \frac{W}{q_1}}$$

Einheit U: 1 J/C = 1 Nm/C
= 1 V (*Volt*)

1V=1J/C

Superpositionsprinzip



$$d = \sqrt{\tfrac{3}{4}} \cdot a \approx 0.35\text{nm}$$

<u>Frage:</u> Wie groß ist das Potential der 8 Cs^+ Ionen am Cl^- Platz ? Welche Energie (in eV) ist notwendig, um das Cl^- Ion nach ∞ zu bringen ?

$$\varphi_d = 8 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_{Cs}}{d} = 329V$$

$$W = (\varphi_d - \varphi_\infty) \cdot q_{Cl} = 329eV$$

5.1 Grundbegriffe: Spannungsquellen

Ladung

Coulomb-Kraft

Verschiebungsarbeit W und potentielle Energie

Potential und Spannung

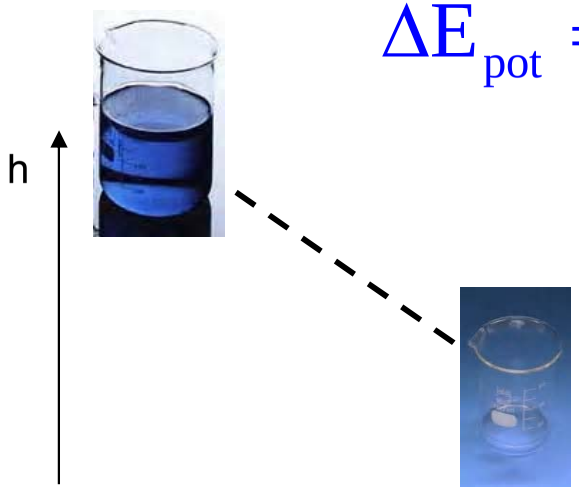
- einfachstes *Beispiel*: Potential einer einzigen Punktladung
- **Spannungsquellen**

5.1 Grundbegriffe: Spannungsquellen

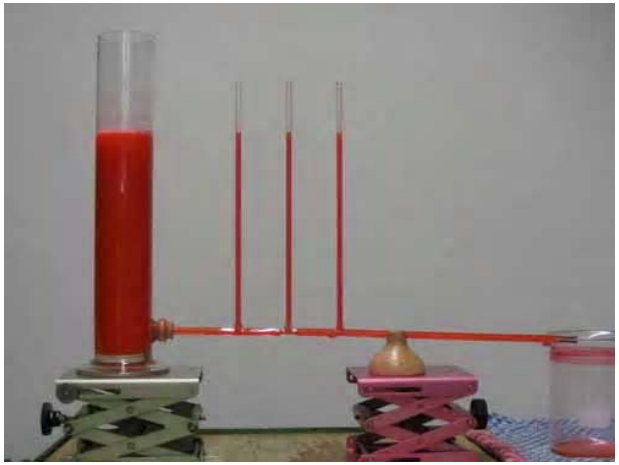
„Mechanische Spannungsquellen“

„g Δh-Speicher“

$$\Delta E_{pot} = (g \cdot \Delta h) \cdot m_1$$



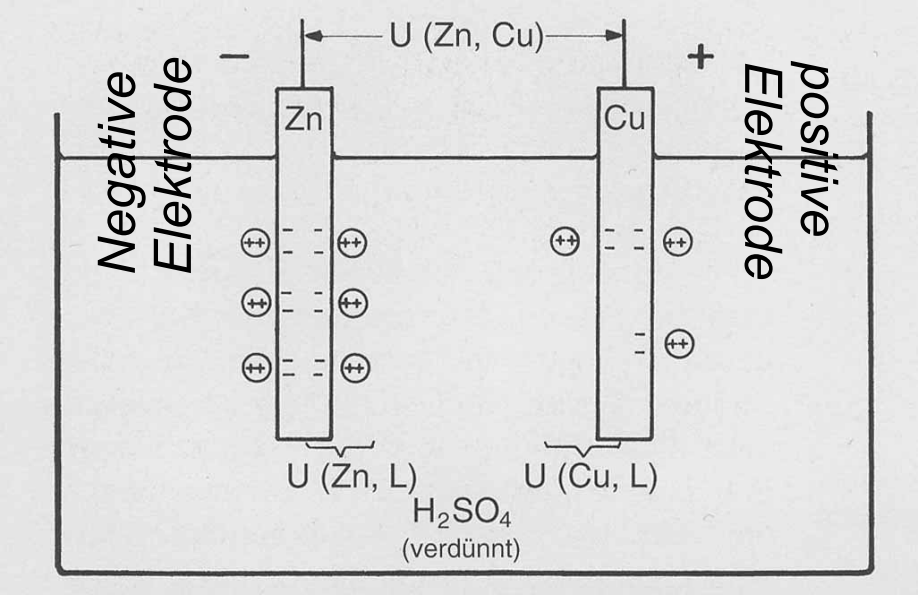
„Δp-Speicher“



„Δφ-Speicher“ oder „U-Speicher“

5.1 Grundbegriffe: Spannungsquellen

Galvanisches Element (Batterie)



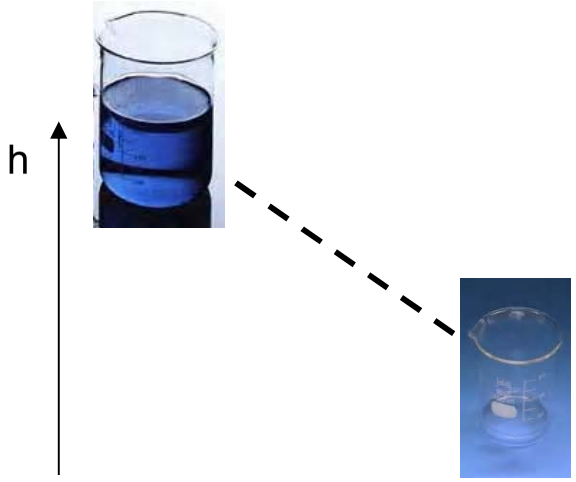
Metalle in Elektrolytflüssigkeit.

Wegen Adhäsion gehen Metallionen in **Lösung**, die Elektronen bleiben im Metall.

Zwischen Metall und Lösung baut sich eine **Spannung U(Met,L)** auf. Im Gleichgewicht wird die Lösung weiterer Ionen durch U(Met,L) kompensiert (Elektrode zieht Ionen an).

Unterschiedliche Metalle zeigen unterschiedliche Löslichkeit und damit auch **unterschiedliche Spannungen** zur Lösung:

U(Zn,Cu) = U(Zn,L) - U(Cu,L)



H_2SO_4 erhöht die Löslichkeit der Metalle.

Größenordnung: 1V Gleichspannung

5.1 Grundbegriffe: Strom

Ladung

Coulomb-Kraft

Verschiebungsarbeit W und potentielle Energie

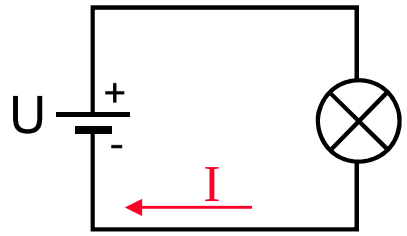
Potential und Spannung

- einfachstes *Beispiel*: Potential einer einzigen Punktladung
- Spannungsquellen

Strom

5.1 Grundbegriffe: Strom

Galvanisches Element, Strom

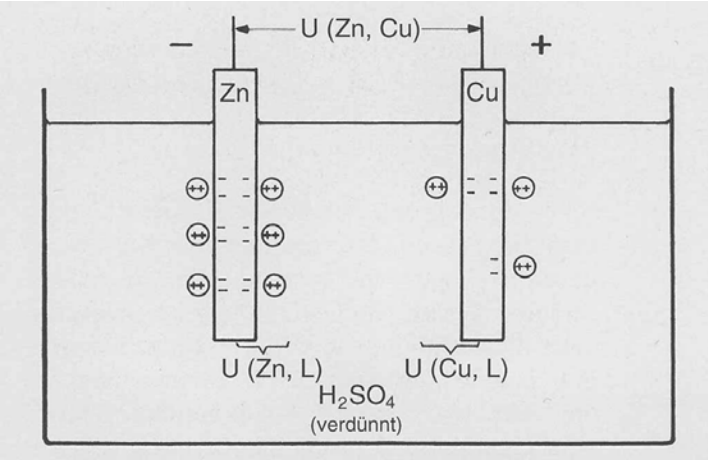


Verbindet man die beiden Elektroden durch einen Metalldraht, in dem die Elektronen frei beweglich sind, dann fließt aufgrund der Spannung (~ Differenz der potentiellen Energie) ein (Ladungs-)Strom I:

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$

(oder $\Delta q/\Delta t$)

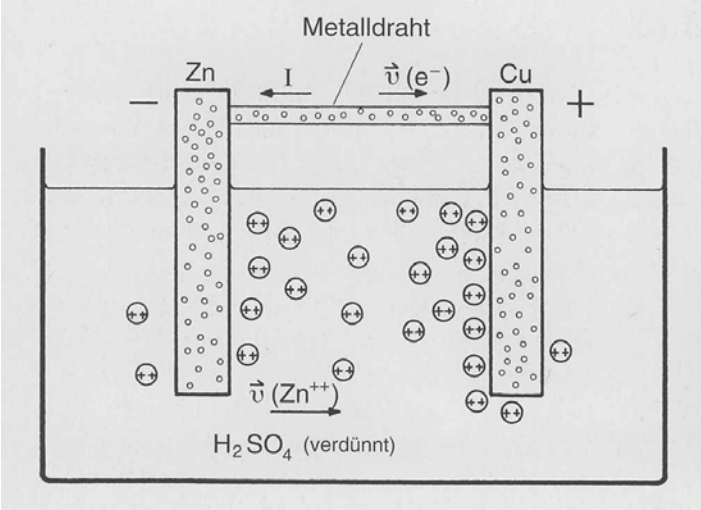
analog zur Volumenstromstärke $I_V = \Delta V/\Delta t$



Stromstärke I = pro Zeiteinheit durch Querschnitt A des Leiters fließende Ladung.

Einheit: 1 A (Ampere) ist Basiseinheit im SI-System.

1 A = 1 C/s



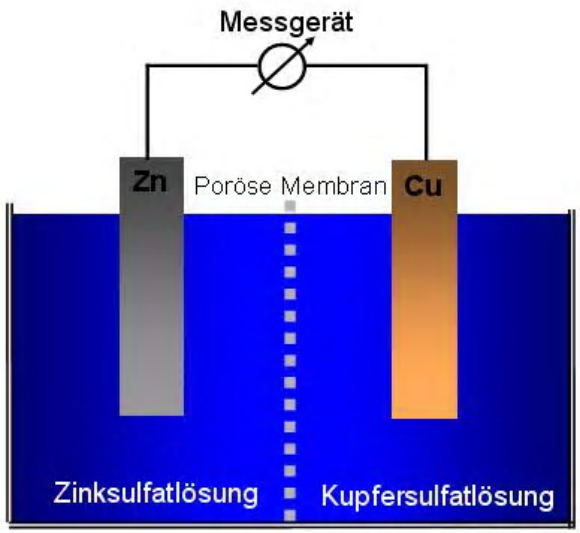
Definition der Stromrichtung: **von + nach –**

(entgegen der Fließrichtung der Elektronen)

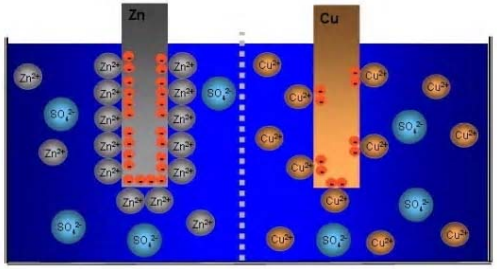
5.1 Grundbegriffe: Strom

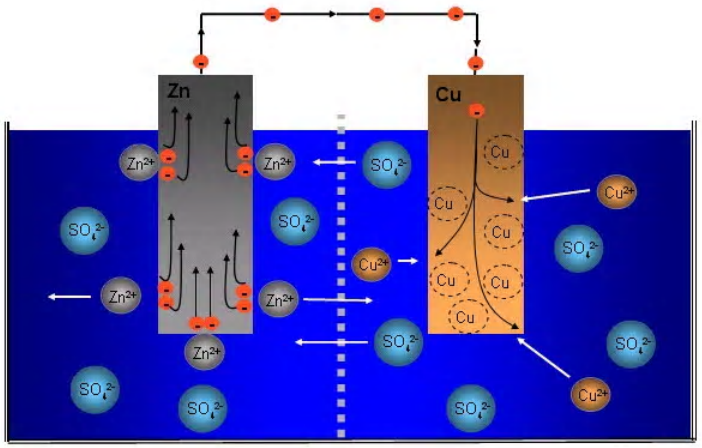
Galvanisches Element, Strom

Verbindet man die beiden Elektroden durch einen Metalldraht, in dem die Elektronen frei beweglich sind, dann fließt aufgrund der Spannung (Differenz der potentiellen Energie) ein (Ladungs-)Strom.



In der Lösung wird der Strom von den Zn-Ionen getragen. Diese nehmen an der Cu-Elektrode Elektronen auf und schlagen sich als Zn-Atome nieder. Damit kann ein neues Zn-Ion in Lösung gehen. Die Batterie ist verbraucht, wenn der Cu-Stab komplett mit Zn-Atomen überzogen ist.

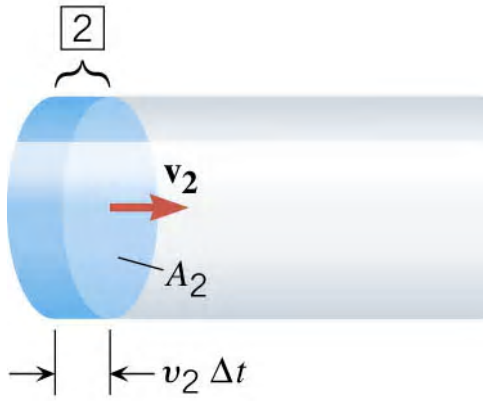




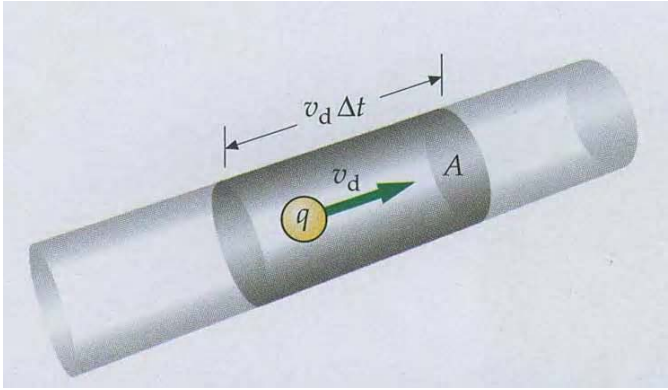
http://www.chempage.de

5.1 Grundbegriffe: Strom

Analogie mit Hydrodynamik



Bewegliche Masse	Bewegliche Ladung
wird transportiert durch	
ein Rohr.	einen Leiter.
Massenstrom:	Ladungsstrom:
$I_m = dm/dt$	$I = dq/dt$
Durchgeflossen nach der Zeit t ist	
die Masse m	die Ladung q
$m = \int dm = \int_0^t I_m \cdot dt$	$q = \int dq = \int_0^t I \cdot dt$



Der Strom wird angetrieben durch die

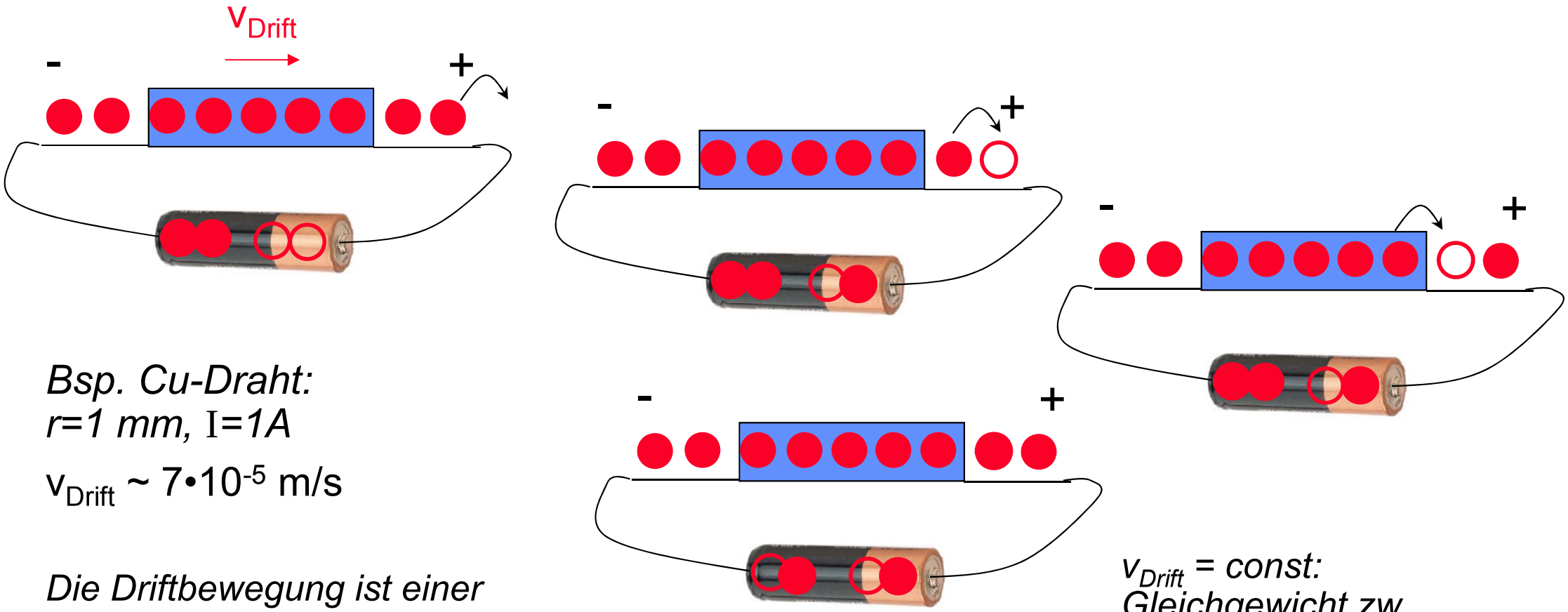
Druckdifferenz Δp	Potentialdifferenz $\Delta\varphi = U$
gegen den	
Strömungswiderstand R.	elektrischen Widerstand R.

5.1 Grundbegriffe: Strom

Technische (konventionelle) Stromrichtung von + nach -

Fliessen von Elektronen von – nach + ist äquivalent

dem Fliessen eines fehlenden Elektrons (Defektelektron, Loch) von + nach -.



Bsp. Cu-Draht:
r=1 mm, I=1A

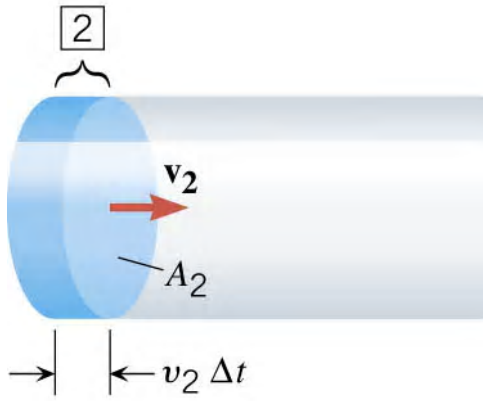
$v_{Drift} \sim 7 \cdot 10^{-5}$ m/s

Die Driftbewegung ist einer viel schnelleren, <u>ungeordneten</u> Bewegung der Elektronen (etwa 10^6 m/s) überlagert.

v_{Drift} = const:
Gleichgewicht zw.
1) Beschleunigung durch Potentialdifferenz &
2) Reibung (Widerstand).

5.1 Grundbegriffe: Strom

Analogie mit Hydrodynamik: Ladungsträgerdichte

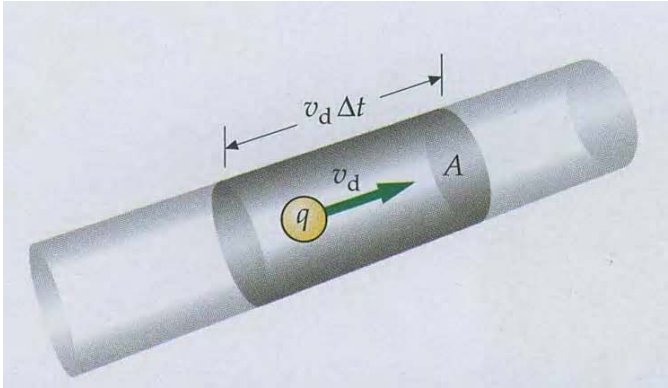


Massenstrom: $I_m = dm / dt = \rho\, A\, v_0$ (für v=const über A)

Ladungsstrom: $I = dq / dt = \Delta q / \Delta t$ (für I = const)

➔ $I = n\, e\, A\, v_D = N_e/V\, e\, A\, \Delta s/\Delta t$

oder Stromdichte $i = n\, e\, v_D$



mit N = Anzahl Elektronen (Ladungsträger)

n = N/V Ladungsträgerdichte (Anzahl Elektronen / Vol.)

e = Elementarladung

➔ **n*e = Ladungsdichte** (Ladung/Volumen)

A = Querschnittsfläche

v_D = effektive Driftgeschwindigkeit der Elektronen

$n_{Cu} \sim 8.5 \cdot 10^{22} / cm^3$

5.1 Grundbegriffe: Strom

Träger des Stroms

in Metallen: freie Elektronen

in Halbleitern: Elektronen und Defektelektronen (Löcher)

in Elektrolyten: Ionen

Plasmen (ionisierte Gase): Elektronen & Ionen

Typische Werte

Haushaltssicherung:	10 A = 10 C/s
Autoanlasser:	100 A
Hochspannungsleitung:	500 A
Blitz:	10^4 A (20-30 C)

Physiologische Wirkung

abhängig vom Weg im Körper, von Dauer und Frequenz

~2 mA Kribbeln

>100-300 mA Spasmus (kleben)

>150-500 mA Kammerflimmern

Auswirkungen (*Wie misst man einen Strom ?*)

1) Strom erzeugt Wärme in einem Widerstand.

2) Strom erzeugt ein **Magnetfeld**.

3) Strom induziert chem. Reaktion an den Elektroden im Elektrolyt.

5.1 Grundbegriffe: Widerstand

Ladung

Coulomb-Kraft

Verschiebungsarbeit W und potentielle Energie

Potential und Spannung

- einfachstes *Beispiel*: Potential einer einzigen Punktladung
- Spannungsquellen

Strom

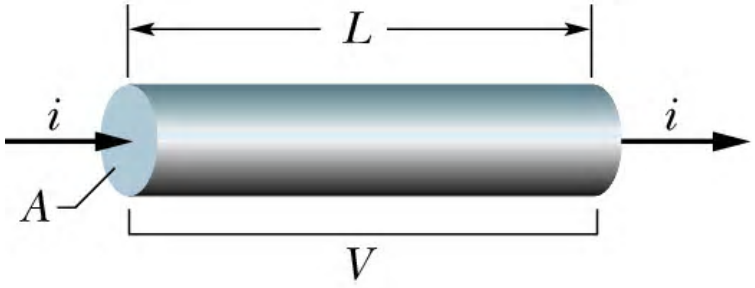
Widerstand

5.1 Grundbegriffe: Widerstand

Definition des Widerstandes R

$$R = \frac{U}{I}$$

Nimm einen beliebigen Gegenstand, leg eine Spannung U an, bestimme I
➔ berechne R



Einheit R: 1 Ω (Ohm) = 1 V/A

Der Widerstand R ist die Eigenschaft eines **Gegenstands**, der spezifische Widerstand ρ ist eine **Materialeigenschaft**.

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

gilt für homogene, isotrope Leiter mit konstantem Querschnitt A

Doppelte Länge L
➔ R verdoppelt, ρ gleich

Einheit ρ: 1 Ωm

Der spez. Widerstand ρ ist unabhängig von der Geometrie.

Er variiert aber mit der Temperatur und ist stark materialabhängig.

Bei 20°C: $\rho_{Cu} \sim 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m = 1.7\ \mu\Omega cm$, $\rho_{Fe} \sim 10 \cdot 10^{-8}\ \Omega m$,

$\rho_{Si(rein)} \sim 10^{3}\ \Omega m$, $\rho_{Glas} \sim 10^{14}\ \Omega m$

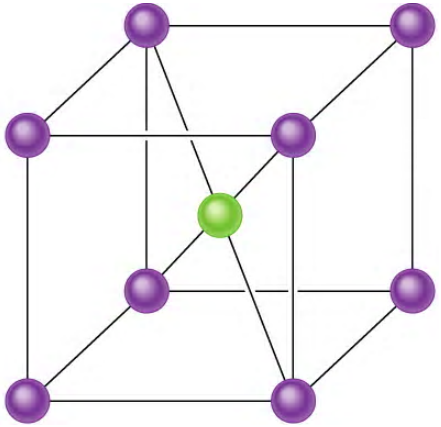
5.1 Grundbegriffe: Widerstand

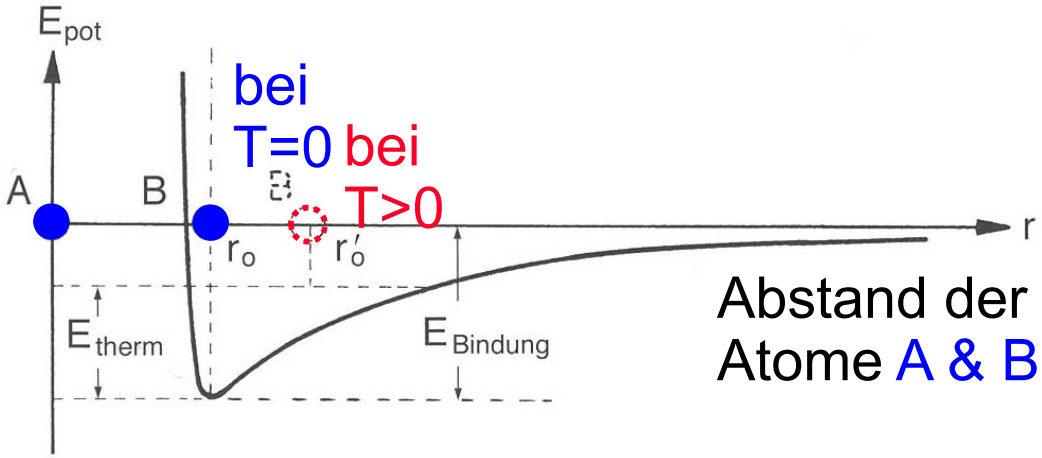
Unterschied zur Hydrodynamik

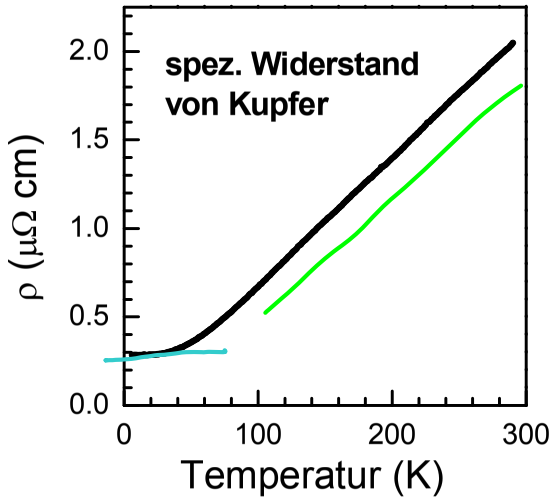
Wesentliche **Ursache des elektrischen Widerstandes** ist **nicht die Wechselwirkung zwischen den Elektronen**,
sondern die **Streuung** (Stöße) mit

1) **Defekten** (Störstellen, Verunreinigungen im Kristall; **Temperaturunabhängig**)

2) dem (thermisch angeregten) **Ionengitter**. Dabei sind Stöße mit dem perfekt geordneten Gitter nicht möglich, die Elektronen stoßen nur an Abweichungen von der Ordnung. Diese nehmen mit steigender Temperatur zu.







5.1 Grundbegriffe: Ohmsches Gesetz

Ladung

Coulomb-Kraft

Verschiebungsarbeit W und potentielle Energie

Potential und Spannung

- einfachstes *Beispiel*: Potential einer einzigen Punktladung
- Spannungsquellen

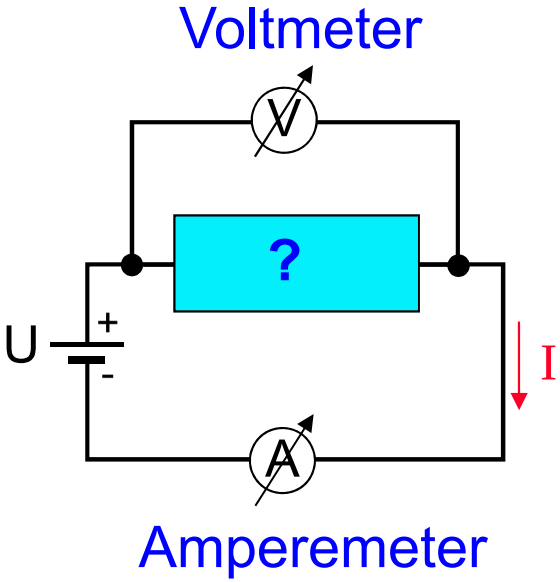
Strom

Widerstand

Ohmsches Gesetz

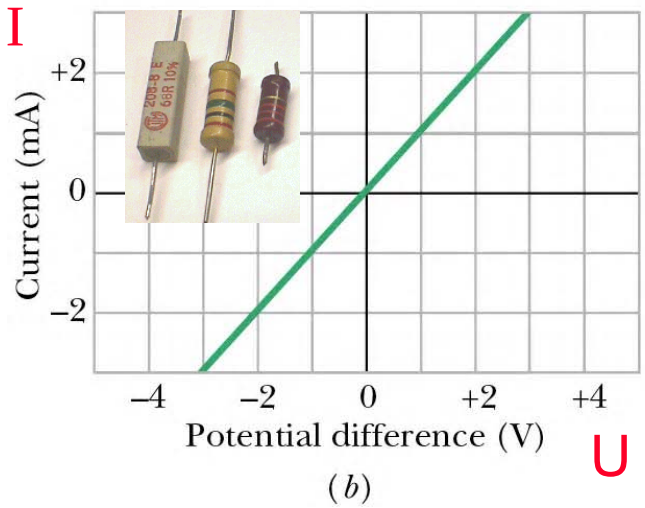
5.1 Grundbegriffe: Ohmsches Gesetz

Strom-Spannungs-Kennlinie

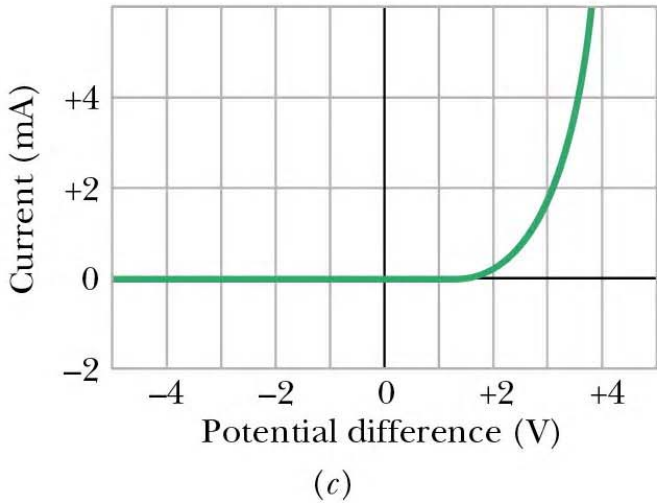


$$U = R \cdot I \qquad I = \frac{U}{R}$$

Bauteil Widerstand



Bauteil Diode



Ohmsches Gesetz
⇔
lineare I-U-Kennlinie, R = const

Diode ist kein Ohmscher Leiter, R = R(U).

Ein Leiter folgt dem **Ohmschen Gesetz**, wenn der Strom immer genau **proportional** zur angelegten Spannung ist (bei einer festen Temperatur), d.h. wenn der Widerstand R unabh. von U ist.

5.1 Grundbegriffe: Leistung

Ladung

Coulomb-Kraft

Verschiebungsarbeit W und potentielle Energie

Potential und Spannung

- einfachstes *Beispiel*: Potential einer einzigen Punktladung
- Spannungsquellen

Strom

Widerstand

Ohmsches Gesetz

Leistung

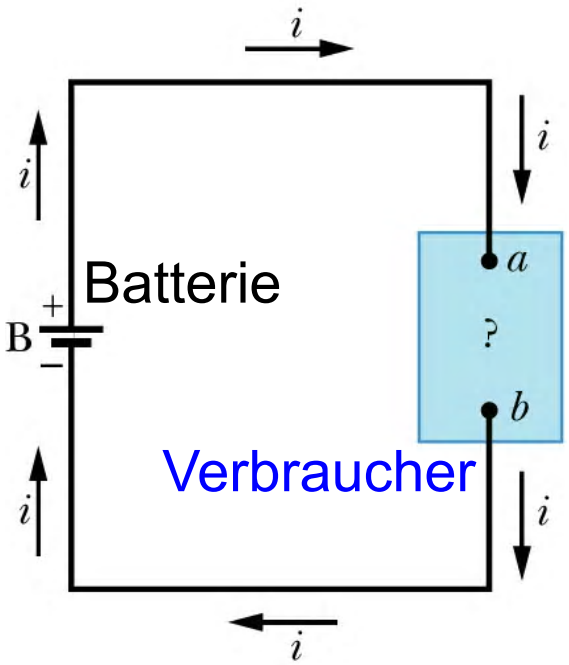
5.1 Grundbegriffe: Leistung

Leistung P (s. Kap. 2.3)

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{U \cdot dq}{dt} = U \cdot I$$

$$\boxed{P = U \cdot I}$$

Einheit: 1 V A = 1 (J/C) (C/s)
= 1 J/s = **1 W (Watt)**



Chem. Energie der Batterie (= potentielle Energie der Elektronen) wird überführt in:

- mech. Energie (Verbraucher = Elektromotor)
- Wärme (Verb. = Widerstand)
- chem. Energie (Verb.=Akku)

Die elektrische potentielle Energie der Elektronen wird im Verbraucher in andere Energieformen umgewandelt.
Die mittlere **kinetische Energie** der Elektronen wird dabei **nicht verändert**, v_{Drift} = const.

Arbeit W für P=const:

$$\boxed{W = \int P \cdot dt = U \cdot I \cdot t = U \cdot q}$$

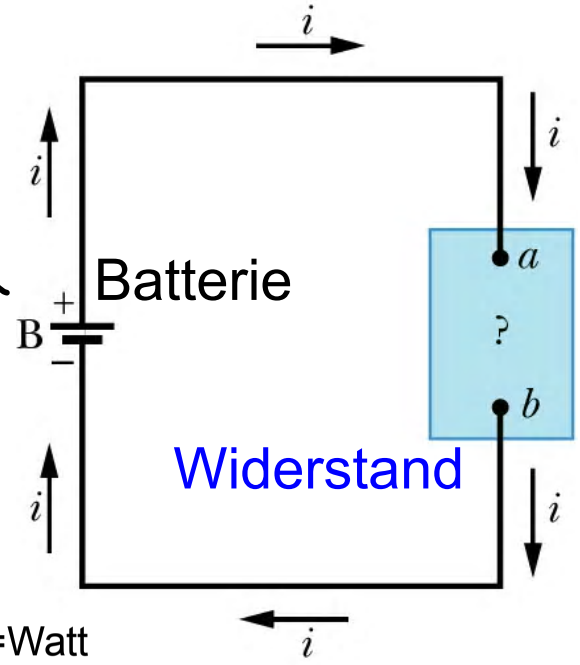
5.1 Grundbegriffe: Leistung

Spezialfall: Leistung P für Dissipation im Widerstand R

$$P = U \cdot I \qquad R = \frac{U}{I}$$

$U = RI$; $I = \frac{U}{R}$

$$\boxed{\Rightarrow P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}}$$



Chem. Energie der Batterie (= potentielle Energie der Elektronen) wird im Widerstand in Wärme überführt.

Analog: Kugeln rollen ein Nagelbrett hinunter.

Einheiten: 1V=1J/C
➔ $[RI^2] = (V/A)\,A^2 = VA = (J/C)(C/s) = J/s = Watt$

Bsp.: Wie groß ist der **Strom** durch eine 100 W Glühbirne (1000 W Fön) ?

U = 220 V ➔ I = P/U = 100 W / 220 V ~ **0.45 A** (**4.5 A**)

Wie groß ist der **Widerstand** der 100 W Glühbirne ?

R = U^2/P = $(220\ V)^2$ / 100 W = 484 Ω

Was **kostet** der Betrieb der 100 W Glühbirne pro Stunde ? (25 Ct / kWh)

W = U I t = 100 W 1h = 0.1 kWh ➔ 2.5 Ct (jeden Abend 4h ➔ 36,5€)

5.1 Grundbegriffe: Zusammenfassung

- **Coulomb-Kraft** $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$

- **elektrische Spannung (Potentialdifferenz)** $U_{ab} = \frac{\Delta E_{pot}}{q_1} = \frac{W}{q_1} = \frac{1}{q_1}\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}(-\vec{F})\cdot d\vec{r}$

- **1/r-Potential einer Punktladung** $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$

- **Strom** $I = \frac{dq}{dt}$ $\quad I = n \cdot e \cdot A \cdot v_D$ $\quad q = \int dq = \int_0^t I \cdot dt$

  n = Ladungsträgerdichte

- **Widerstand** $R = U / I$ **und spez. Widerstand** $R = \rho\frac{L}{A}$

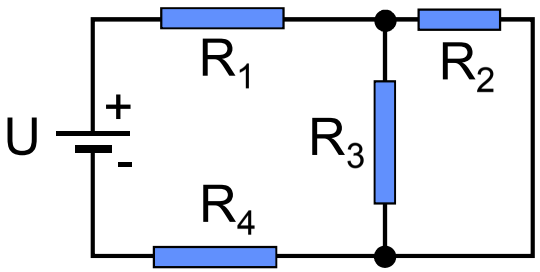
- **Ohmsches Gesetz** $U = R \cdot I \quad (R = \text{const})$

- **Leistung** $P = U \cdot I$ **am Widerstand:** $P = R \cdot I^2 = U^2 / R$

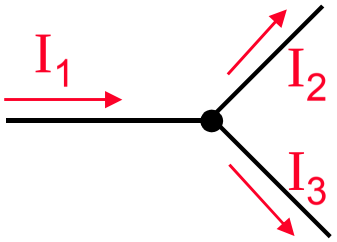
- **Arbeit** $W = U \cdot I \cdot t$

5.2 Elektrische Netzwerke

Kirchhoffsche Regeln



Welcher Strom fließt in den einzelnen Zweigen ?



Aus der Ladungserhaltung bzw. der Kontinuitätsgleichung folgt:

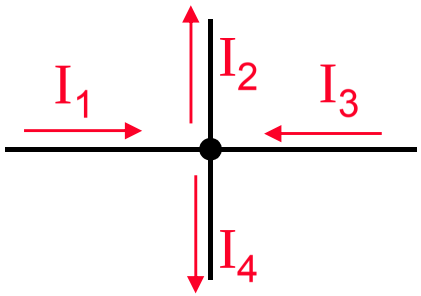
$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$\boxed{\sum_j I_j = 0}$$

zum Knoten: **+**
vom Knoten: **-**

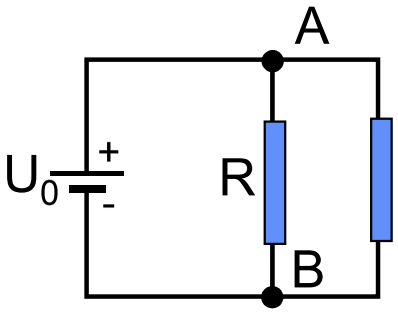
Knotenregel:

Die Summe aller Ströme, die zu einem Knoten hin fließen, ist gleich der Summe der Ströme, die von diesem Knoten weg fließen.



$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

Aus der Energieerhaltung:



$$U_{AB} = -U_{BA}$$

$$U_{AB} + U_{BA} = 0$$

$$\boxed{\sum_{\text{Masche}} U_j = 0}$$

Maschenregel:

Beim Durchlaufen einer Masche (d.h. einer geschlossene Schleife) ist die Summe aller Spannungen gleich Null.

$U_{AB} = U_0 \Rightarrow U_{AB} - U_0 = 0 \Rightarrow$ Batterie von „– nach +“ zählt mit **– U_0** in der Masche