

E-01 – Elektriklabor

(Version 6.3 - 13/02/2025)

Im Elektriklabor können eine Reihe unterschiedlicher Experimente mit Hilfe eines Steckbausteinsystems realisiert werden. An einfachen Beispielen soll der Aufbau einer elektrischen Schaltung veranschaulicht und geübt werden. Das Bausteinsystem erleichtert dabei den Übergang von der Schaltskizze zum realen Aufbau. Die einzelnen Experimente befassen sich mit unterschiedlichen Aspekten der elementaren Elektrizitätslehre. Dabei werden grundlegende Kenntnisse über Wechselstrom und das Verhalten von elektrischen Bauelementen wie Kondensatoren und ohmschen Widerständen im Wechselstromkreis vermittelt. Mit dem Oszilloskop wird das gängige Messgerät in der Wechselstrommesstechnik vorgestellt und verwendet. Vor dem Praktikumstermin vereinbaren die Studenten mit dem Betreuer, welcher Versuchsteil durchgeführt werden soll.

Wechselstrom

Wechselstrom wird in der elektrischen Energieversorgung wesentlich häufiger eingesetzt als Gleichstrom. Dies liegt an der einfacheren Erzeugung über Generatoren und der einfachen Möglichkeit der Umspannung über Transformatoren. Neben der gebräuchlichen 50 Hz-Netzspannung begegnen uns im Alltag verschiedenste Wechselspannungen, z. B. in der Nachrichtenübertragung, Telekommunikation und Rundfunk.

Als Wechselspannungen bezeichnet man ganz allgemein elektrische Spannungen, die zeitlich nicht konstant sind, sondern sich, üblicherweise periodisch, ändern. Technisch verwendete Wechselspannungen lassen sich durch Sinus- und Kosinusfunktionen beschreiben, z. B.

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t),$$

wobei mit $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz zur Frequenz ν bezeichnet wird, und mit U_0 der Scheitelwert der Spannung. Als *Effektivwert* der Wechselspannung bezeichnet man eine fiktive Gleichspannung, die an einem ohmschen Widerstand die gleiche Leistung umsetzt wie *im zeitlichen Mittel* die Wechselspannung. Bei sinusförmigem Verlauf mit Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gilt

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T dt U(t) I(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \quad \Rightarrow \quad U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0, \quad I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0.$$

Grundlegend für die Zusammenhänge zwischen Spannung und Strom in Wechselstromkreisen mit Widerständen, Kondensatoren und Spulen sind das Ohmsche Gesetz und die Kirchhoffschen Regeln. Sie sind auch für Wechselstrom gültig, genauer für die *Momentanwerte* von Strom und Spannung und damit auch für deren Effektivwerte. Die rechnerische Schwierigkeit besteht zu meist darin, Ströme oder Spannungen mit gleicher Frequenz, aber unterschiedlicher Amplitude und Phase zu addieren. Um diese Addition zu vereinfachen, benutzt man häufig *Zeigerdiagramme*.

Dabei nutzen wir aus, dass Sinus- und Kosinusfunktion die Komponenten einer Kreisbewegung sind. Betrachten wir zum Beispiel die Position eines Punktes, der gleichförmig mit der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ auf einem Kreis mit Radius r um den Ursprung läuft. Dann ist die vertikale Komponente gegeben durch $y(t) = r \sin(\omega t)$. Umgekehrt können wir also z. B. eine Spannung, die einen Sinusverlauf mit der Amplitude U_0 zeigt, auf einem Kreis mit Radius U_0 darstellen, wie in

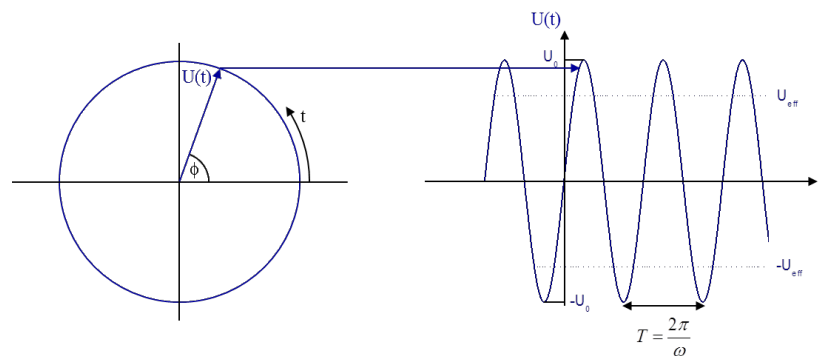


Abbildung 1: Darstellung einer Wechselspannung im Zeigerdiagramm.

Abbildung 1 zeigt. Die Spannung wird dabei durch einen Pfeil oder *Zeiger* dargestellt, wobei der Momentanwert der Spannung $U(t)$ durch die vertikale Komponente des Zeigers gegeben ist. Dieser Wert ändert sich also offenbar zeitlich mit dem Phasenwinkel $\phi = \omega t$, wobei der Zeiger gegen den Uhrzeigersinn läuft. Die *Länge* des Zeigers bleibt dabei fest mit dem Wert U_0 . Der Vorteil einer solchen Zeigerdarstellung liegt nun darin, dass eine Phasenverschiebung zwischen zwei unterschiedlichen periodischen Größen (z. B. Strom und Spannung im Wechselstromkreis) direkt als Winkel abgelesen werden kann, und dass sich bei Addition zweier Größen (z. B. der Spannungen am Widerstand und an der Spule) sowohl die resultierende Amplitude, als auch die Phasenlage aus der geometrischen Addition der Zeiger ergibt. Dies soll in den folgenden Beispielen verdeutlicht werden.

Ohmscher Widerstand, Kondensator und Spule im Wechselstromkreis

Ein ohmscher Widerstand verhält sich in einem Wechselstromkreis genauso wie im Gleichstromkreis: nach dem Ohmschen Gesetz gilt $U_R(t) = R \cdot I(t)$. Dies lässt sich für einen sinusförmigen Verlauf der Spannung nur erfüllen, wenn gilt

$$U_R(t) = U_0 \sin(\omega t) = R \cdot I_0 \sin(\omega t).$$

Strom und Spannung zeigen offensichtlich dieselbe Zeitabhängigkeit, d. h. es gibt keine Phasenverschiebung. Abbildung 2 zeigt das Zeigerdiagramm für einen rein ohmschen Widerstand. An einem Kondensator mit der Kapazität C ist die Spannung proportional zur Ladung Q

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}.$$

Für einen idealisierten Stromkreis ohne ohmsche Widerstände können wir also schreiben

$$U_C(t) = U_0 \sin(\omega t) = \frac{Q_0}{C} \sin(\omega t), \quad \text{mit} \quad U_0 = \frac{Q_0}{C},$$

weil $Q(t)$ die gleiche Zeitabhängigkeit wie die Spannung besitzen muss. Für den Strom gilt daher

$$I_C(t) = \dot{Q}(t) = \omega Q_0 \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t) = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{mit} \quad I_0 = \omega Q_0.$$

Der Strom ist also um $\varphi = \pi/2$ gegenüber der Spannung *phasenverschoben*. Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator lässt sich damit wie folgt ausdrücken

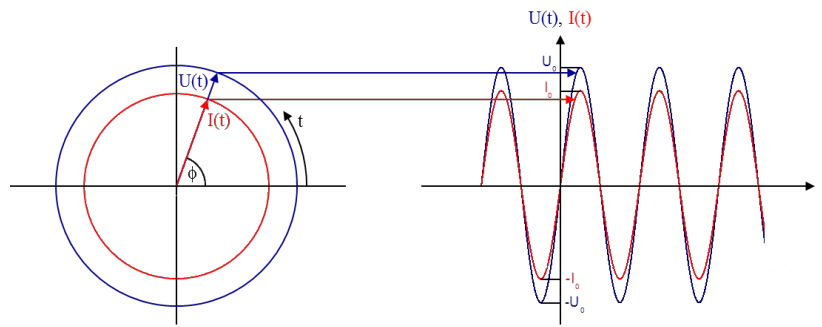


Abbildung 2: Zeigerdiagramm für einen ohmschen Widerstand.

$$U_C(t) = \frac{I_C(\omega t - \frac{\pi}{2})}{\omega C} . \quad (1)$$

Die Spannung läuft dem Strom folglich um eine Viertelperiode nach. Im Zeigerdiagramm bedeutet dies, dass der Zeiger für den Strom um einen Winkel $\pi/2$ *vor* dem Zeiger der Spannung liegt (positive „Drehrichtung“ ist *gegen* den Uhrzeigersinn!), wie in Abbildung 3 dargestellt.

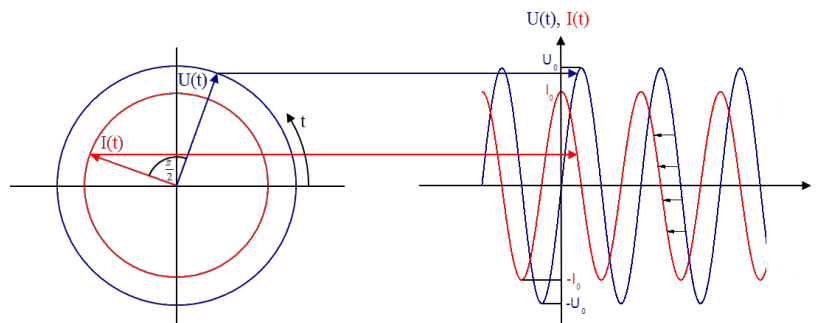


Abbildung 3: Zeigerdiagramm für einen kapazitiven Widerstand.

Der Ausdruck (1) ähnelt formal dem ohmschen Gesetz für einen Widerstand R . Man definiert daher den *kapazitiven* Widerstand Z_C am Kondensator

$$Z_C = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C} . \quad (2)$$

Der Wechselstromwiderstand Z wird auch *Impedanz* genannt, um ihn vom rein ohmschen Widerstand zu unterscheiden.

Bei einer idealisierten Induktivität L ($R = 0$) ist die anliegende Spannung proportional zur zeitlichen Änderung des Stroms

$$U_L(t) = L \cdot \dot{I}_L(t) .$$

Wenn die Spannung wieder durch $U_L(t) = U_0 \sin(\omega t)$ gegeben ist, muss die zeitliche Änderung des Stroms ebenfalls durch einen Sinus beschrieben werden, d. h. der Strom selbst folgt einem

Kosinus (mit negativem Vorzeichen):

$$I_L(t) = -I_0 \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_L(t) = \omega I_0 \sin(\omega t) .$$

Wir können damit wieder einen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung in der Form des ohmschen Gesetzes herstellen,

$$U_L(t) = \omega L \cdot I_L \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) ,$$

wobei wir benutzt haben, dass $\sin(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung beträgt hier also $\varphi = -\pi/2$, d. h. die Spannung eilt dem Strom nun um eine Viertelperiode voraus, wie man auch im Zeigerdiagramm in Abbildung 4 sehen kann. Für den Betrag des *induktiven* Widerstands ergibt sich

$$Z_L = \frac{U_0}{I_0} = \omega L . \quad (3)$$

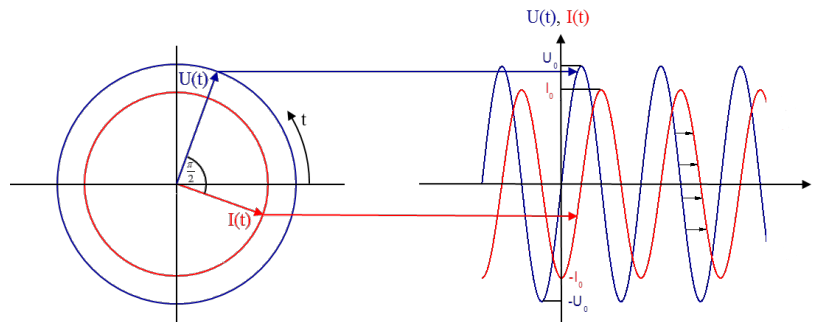


Abbildung 4: Zeigerdiagramm für einen induktiven Widerstand.

In einem realen Stromkreis addieren sich die Beiträge von ohmschem Widerstand, Induktivität und Kapazität zu einer Gesamtimpedanz \hat{Z} . Eine besonders einfache mathematische Darstellung der Zusammenhänge zwischen Strömen und Spannungen im Wechselstromkreis erhält man, wenn man die Darstellung der Zeigerdiagramme als eine *komplexe Zahlenebene* interpretiert. Damit werden Ströme und Spannungen komplexwertige Größen, deren Realteile die *physikalischen* Ströme und Spannungen wiedergeben*:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 e^{i\omega t} &= U_0 \{ \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \} \\ I(t) &= I_0 e^{i\omega t} e^{i\varphi} &= I_0 \{ \cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi) \} . \end{aligned}$$

Für den komplexen Widerstand \hat{Z} definiert man nun ein verallgemeinertes Ohmsches Gesetz

$$\hat{Z} = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} e^{-i\varphi} , \quad (4)$$

*In den vorherigen Beispielen war $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ angesetzt worden, was in der komplexwertigen Darstellung nicht dem *Realteil*, sondern dem *Imaginärteil* entspricht. Diese Lösung ist aber völlig gleichwertig, und da sie bloß einer Drehung der Phase um $\frac{\pi}{2}$ entspricht.

d. h. die komplexe Impedanz *erbt* die Phasenlage zwischen Strom und Spannung, während ihr Betrag $|\hat{Z}| = Z$ den realen Wechselstromwiderstand angibt. Die Ergebnisse (2) und (3) sowie die zugehörigen Phasenlagen ergeben sich dann direkt aus dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz (4). Dies ist allgemein gültig, daher ist die Rechnung mit komplexen Größen besonders nützlich für aufwändigere Schaltungen mit mehr als einer Komponente, bei denen sich ein entsprechend komplizierter Ausdruck für den Wechselstromwiderstand und die Phasenlage ergibt.

Oszilloskop

Das Oszilloskop ist ein weit verbreitetes und vielseitiges Messgerät. Seine Funktionsweise basiert auf der Elektronenstrahlröhre, auch *Braun'sche Röhre*, bei der der Strahl durch paarweise horizontal (X) und vertikal (Y) angeordnete Platten abgelenkt werden kann, indem eine Spannung an die Platten angelegt wird (Abb. 5). Die Ablenkung des Strahls ist dabei proportional zur angelegten Spannung, so dass der Wert der Spannung als Strecke auf dem Bildschirm messbar ist. Häufig wird ein Oszilloskop verwendet, um zeitlich veränderliche Signale darzustellen. Dabei wird das zu untersuchende Signal auf die vertikalen Platten gelegt, während die Horizontalablenkung den zeitlichen Verlauf dieses Signals auf dem Bildschirm wiedergibt.

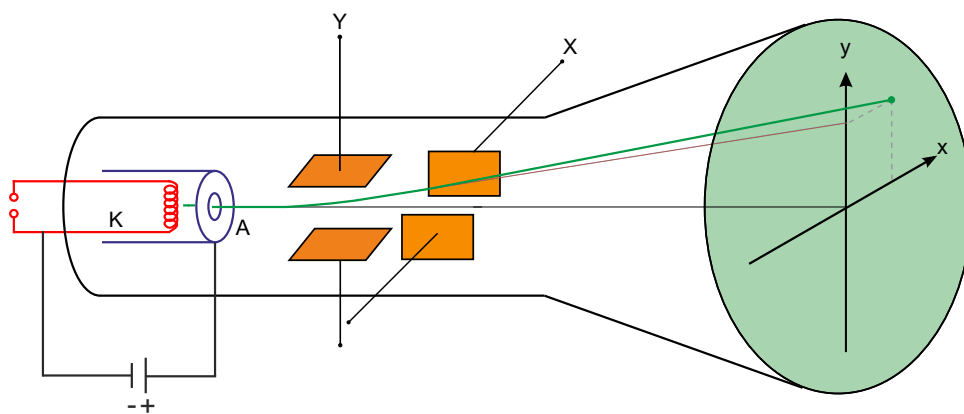


Abbildung 5: Schematischer Aufbau einer Braun'schen Röhre.

Um ein Signal sinnvoll anzeigen zu können, lässt sich die *Empfindlichkeit* der Vertikalablenkung in einem weiten Bereich zwischen wenigen mV und mehreren Volt pro Monitorteilung (VOLTS/DIV, 1 DIV = 1 cm auf dem Bildschirm) einstellen (Abb. 6). Die Zeitablenkung lässt sich ebenfalls einstellen zwischen wenigen μ s und einigen Sekunden (TIME/DIV). Periodische Signale lassen sich „*triggern*“, so dass sie statisch auf dem Bildschirm erscheinen. Dabei wird ein bestimmter Signalwert, der „Triggerpunkt“, auf einem festen Punkt des Bildschirms festgehalten, wobei sowohl der Wert des Triggerpunktes, als auch die Steigung des Signals an diesem Punkt (ansteigende oder fallende Flanke) eingestellt werden kann. Die hier verwendeten Oszilloskope haben zwei Kanäle, d. h. es können zwei verschiedene Signale gleichzeitig dargestellt werden, in Abb. 6 rot und blau dargestellt. Das Oszilloskop kann nur auf einen der beiden Kanäle triggern. In unseren Experimenten werden viele Funktionen des Oszilloskops nicht benötigt. Es genügt, die Einstellungen der Empfindlichkeit und der Zeitskala so zu wählen, dass die zu untersuchenden Signale präzise ausgemessen werden können. Das ganze Monitorbild lässt sich starr in horizontaler (*X-Position*, gelber Knopf in Abb. 6) und vertikaler Richtung (*POSITION 1* bzw. *2*, blauer und roter Knopf) verschieben, um zur Messung das Raster auf dem Bildschirm optimal nutzen zu

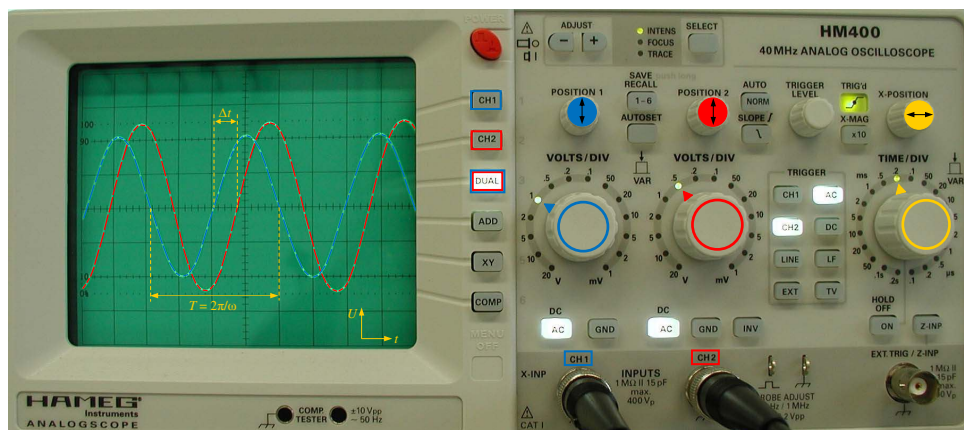


Abbildung 6: Frontplatte eines Oszilloskops. Das U - t -Oszillogramm zeigt den Kurvenverlauf zweier sinusförmiger Spannungen (Zweikanalbetrieb: *DUAL*), welche an den Kanälen *CH1* (blau) und *CH2* (rot) anliegen. Beide Kurven liegen auf derselben Zeitachse t .

können. Vor der Messung ist es sinnvoll, ein bisschen mit dem Oszilloskop herumzuspielen und alle benötigten Funktionen und Einstellungen auszuprobieren.

Um Störungen zu minimieren, werden die Signale mittels *Koaxialleitungen* an das Oszilloskop übertragen. Dabei liegt das Signal auf dem Innenleiter, während der Außenleiter zum einen den Stromkreis zwischen Messgerät und Schaltung schließt, und zum anderen als Abschirmung um den Innenleiter gelegt ist, die wie ein Faradayscher Käfig Einflüsse von außen auf das Signal abfangen soll. Damit lassen sich auch sehr kleine Signale von wenigen mV auf einem Oszilloskop darstellen. Üblicherweise wird der Außenleiter auf *Masse* (Schutzleiter) gelegt oder mit dem Gerätegehäuse verbunden. Bei einem Zweikanaloszilloskop wie dem hier verwendeten kann dies zu messtechnischen Problemen führen, wenn die beiden Kanäle unterschiedliche Signale aus derselben Schaltung anzeigen sollen. Der Grund dafür ist, dass dabei zwei Punkte in der Schaltung auf Masse gelegt, bzw. über das Oszilloskop kurzgeschlossen werden. Abschnitte, die zwischen diesen beiden Punkten liegen und keine weiteren Abzweigungen haben, können daher keinen Strom führen. Dasselbe kann passieren, wenn neben dem Oszilloskop noch weitere Masseverbindungen in der Schaltung bestehen, z. B. an einem Netzteil.

Funktionsgenerator

In unseren Experimenten wird als Spannungsquelle ein Funktionsgenerator verwendet, welcher Wechselspannungen im Bereich von 1 Hz - 250 kHz mit unterschiedlichen Signalprofilen und einer Amplitude von bis zu 5 V_{ss} (Wert zwischen den Scheiteln des Signals gemessen, entspricht also der doppelten Amplitude) auf einem Gleichspannungssignal (*offset*) zwischen 2,5 V und -2,5 V erzeugt. Die gewählte Signalform und Frequenz werden an einem Display angezeigt. Im Praktikum werden ausschließlich sinusförmige Spannungen ohne Gleichspannungsanteil (*Offset* = 0) verwendet.

Signalform und Frequenz werden mittels des *joystick*-Schalters eingestellt: rechts/links ändert die Signalform, auf/ab ändert die Frequenz, Druck auf den Knopf bestätigt die Einstellung (*enter*). Zum schnelleren Einstellen der Frequenz kann man diese durch Drücken des joysticks auswählen und dann jede Stelle des Wertes einzeln verstellen: rechts/links wählt die zu verstellende Ziffer, auf/ab ändert den zugehörigen Wert. Die Amplitude des Signals wird über einen Drehknopf



Abbildung 7: Funktionsgenerater H-Tronic FG-250D.

(„Geber“) eingestellt.

Vor Beginn der Messung empfiehlt es sich, sich mit den Einstellungsmöglichkeiten von Oszilloskop und Funktionsgenerator vertraut zu machen, weil diese im Verlauf des Versuches intensiv genutzt werden.

Steckbrett

Bei diesem Experiment werden alle Komponenten auf einem Steckbrett zusammengesteckt. Es steht eine Reihe verschiedener elektrischer Bauteile zur Verfügung, mit denen vielfältige Schaltungen realisiert werden können. Die Bauteile sind an das Raster des Steckbrettes angepasst. Die Steckplatte besitzt zwei unterschiedlich geschaltete Seiten. Leitende Verbindungen ($R = 0$) sind auf beiden Seiten mit durchgezogenen Linien dargestellt, nicht verbundene Steckplätze sind galvanisch getrennt ($R = \infty$). Das Raster ist so gewählt, dass es verschiedene Steckerabstände erlaubt, entsprechend der benutzten Bauteile.

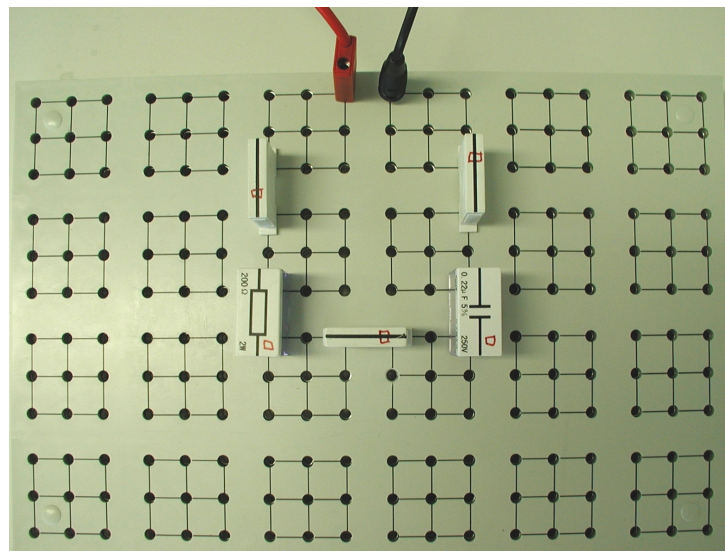


Abbildung 8: Steckbrett (LD Didactic) mit einigen Steckbausteinen und Messleitungen.

Experiment 1 - Der elektrische Schwingkreis (E-01.1)

Sender und Empfänger elektromagnetischer Wellen begegnen uns tagtäglich in elektronischen Geräten, z. B. für Telekommunikation, Rundfunk oder Computernetzwerke. Wegen seiner Resonanzeigenschaften wird in solchen Geräten häufig ein Schwingkreis benutzt, um die Empfangsfrequenz einzustellen. Eine charakteristische Größe des Schwingkreises ist daher seine *Resonanzfrequenz* sowie die *Breite* der Resonanz, welche ein Maß für die Empfindlichkeit des Empfängers auf die Erregerfrequenz ist, und damit bestimmt, wie gut sich „der Sender einstellen lässt“.

Im einfachsten Fall besteht ein elektrischer Schwingkreis aus einem Kondensator und einer Spule, die kurzgeschlossen sind. Bringt man eine Ladung auf den Kondensator, wird dieser sich über die Spule entladen, und infolge der Selbstinduktion der Spule *umgekehrt* gepolt wieder aufladen. Im idealen Fall eines verlustfreien Schwingkreises würde dieses Pendeln der Ladung ewig fort dauern, im realen Fall mit typischen Werten für die Kapazität des Kondensators und die Induktivität der Spule wird die Schwingung jedoch allein schon aufgrund der Leitungswiderstände nach wenigen Perioden abgeklungen sein. Daher untersuchen wir in diesem Experiment einen erregten Schwingkreis mit Dämpfung durch einen ohmschen Widerstand. Die Schaltung für einen solchen Schwingkreis mit einem ohmschen Widerstand R , einem Kondensator mit Kapazität C und einer Spule mit Induktivität L ist in Abbildung 9 gezeigt.

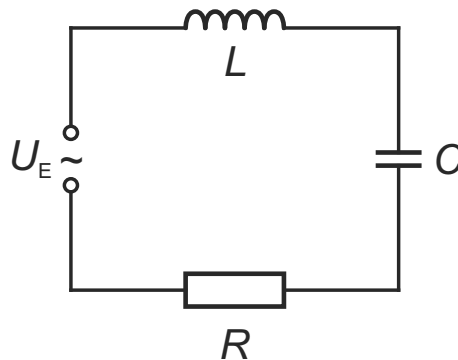


Abbildung 9: Schaltbild des Reihenschwingkreises mit ohmschem Widerstand R , Kondensator mit Kapazität C und Spule mit Induktivität L .

Um das Verhalten des Schwingkreises zu verstehen, wenden wir zunächst die Kirchhoffsche Maschenregel an, $\sum U_i = 0$:

$$U_E(t) = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} + L\dot{I}(t). \quad (5)$$

Für die Erregerspannung $U_E(t)$ setzen wir eine komplexwertige Darstellung einer periodischen Funktion von der Zeit an, und benutzen $I(t) = \dot{Q}(t)$, um eine Differenzialgleichung für die Ladung aufzustellen:

$$U_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{C}Q(t) + R\dot{Q}(t) + L\ddot{Q}(t).$$

Diese Differenzialgleichung ist formal identisch mit der Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators, wie er z. B. im mathematischen Pendel für kleine Auslenkungen realisiert ist. Die bekannten Lösungen des mechanischen Problems können daher direkt auf den elektrischen Schwingkreis übertragen werden, indem man die mechanischen Größen durch die entsprechenden elektrischen ersetzt.

Vorbereitung: Welche physikalischen Größen des mechanischen Oszillators entsprechen der Spannung, der Stromstärke, der Ladung, dem Widerstand, der Kapazität und der Induktivität?

Wir machen einen Lösungsansatz $Q(t) = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t}$, wobei \mathbf{Q}_0 eine *komplexwertige* Größe ist, deren Betrag Q_0 die Amplitude der Schwingung bestimmt, und deren Phase die *Phasenverschiebung* der Ladung gegenüber der Erregerspannung angibt. Durch Einsetzen des obigen Ansatzes in die Differenzialgleichung (5) findet man für die Amplitude der Stromstärke als Funktion der Erregerkreisfrequenz

$$I_0(\omega) = \frac{\hat{I}_0 \gamma \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}}, \quad (6)$$

wobei wir folgende Symbole eingeführt haben:

$$\begin{aligned} \hat{I}_0 &= \frac{U_0}{R} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \gamma &= \frac{R}{L} \end{aligned} \quad (7)$$

Vorbereitung: Herleitung der Phasenlage zwischen Stromstärke und Erregerspannung. Welche *physikalische* Bedeutung haben die Größen \hat{I}_0 , ω_0 und γ ?

Wie man sieht, hängen die Amplitude und die Phasenlage der Stromstärke neben der Kreisfrequenz nur von den oben definierten Parametern \hat{I}_0 , ω_0 und γ ab. In Abbildung 10 ist die allgemeine Form der sogenannten *Resonanzkurve* der Amplitude der Stromstärke $I_0(\omega)$ (oben) und der Phasenlage $\varphi(\omega)$ (unten) als Funktion der Erregerkreisfrequenz ω gezeigt, wobei die Stromstärke auf \hat{I}_0 und die Kreisfrequenz auf ω_0 normiert sind. Die Form der Kurven hängt nur noch von dem Verhältnis γ/ω_0 ab, das ein Maß für die Breite der Resonanz ist.

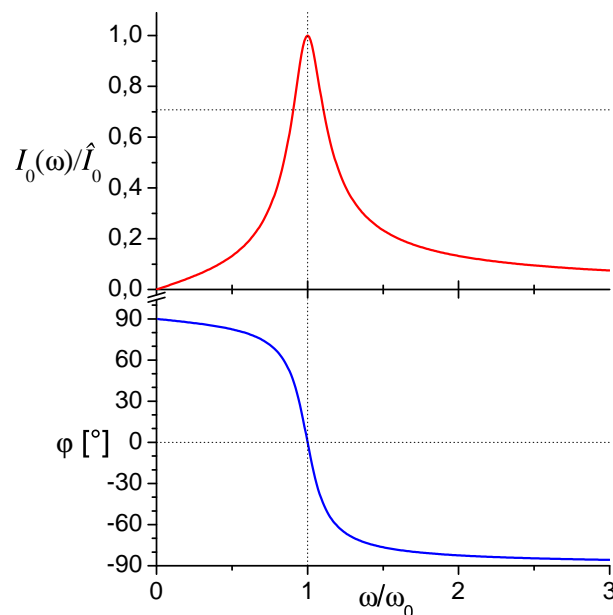


Abbildung 10: Resonanzkurve (rot) und Phasenlage (blau) des Stroms im Reihenschwingkreis.

Vorversuch: Wechselstromwiderstand einer Spule

Um mit den vorhandenen Geräten vertraut zu werden, soll die Frequenzabhängigkeit der Stromstärke $I_{RL}(\nu)$ in einer einfachen Schaltung bestehend aus einem ohmschen Widerstand R und einer Spule mit Induktivität L untersucht werden. Hierbei werden die Frequenz der Erregerspannung am Funktionsgenerator variiert, und die Amplituden von Strom und Spannung auf dem Oszilloskop beobachtet. Aus der Stromamplitude $I_{RL}(\nu)$ lässt sich die Impedanz der Schaltung $Z_{RL}(\nu)$, und durch geschickte Darstellung der Messwerte auch der Wert der Induktivität der Spule bestimmen.

Messung: Die Schaltung für diesen Vorversuch geht aus dem Schwingkreis in Abbildung 9 hervor, indem man den Kondensator weglässt bzw. überbrückt. Der Wert für den Widerstand R ist beliebig wählbar. Als Spannungsquelle dient der Funktionsgenerator. Mit Hilfe des Oszilloskops werden die Amplitude der **Erregerspannung** $U_E(\nu)$ und der **Stromstärke** $I_L(\nu)$ für 10 - 15 Werte der Frequenz ν im gesamten messbaren Bereich bestimmt. Dafür sind sinnvolle, d. h. nicht unbedingt äquidistante Schritte in den Frequenzen zu wählen. Die Werte der Frequenzen sollen für einige Einstellungen am Oszilloskop geprüft, und Abweichungen ggf. in der Auswertung berücksichtigt und korrigiert werden. Für die Auswertung müssen Ablesegenauigkeit sowie die Größe des verwendeten Widerstandes protokolliert werden.

Vorbereitung: Wie lässt sich ein zum Momentanwert der Stromstärke $I_L(t)$ *proportionales* Signal auf dem Oszilloskop darstellen? Welchen Einfluss haben die Werte von U_E und R auf das Ergebnis?

Auswertung:

- Die Stromstärke $I_{RL}(\nu)$ (mit *Fehlerbalken!*) soll als Funktion der Frequenz ν grafisch dargestellt werden.
- Durch geschickte Darstellung der Messwerte lässt sich der Wert der Induktivität L der Spule aus einer grafischen Geradenanpassung ermitteln.

Vorbereitung: Welche „Größe“ muss als Funktion wovon aufgetragen werden, damit eine Gerade entsteht, aus deren Steigung der Wert von L bestimmt werden kann?

- Mit den numerischen Werten der Bauteile R und L lässt sich eine theoretische Vorhersage für $I_{RL}(\nu)$ berechnen, die im selben Diagramm mit den Messwerten dargestellt werden soll.
- Die Frequenzabhängigkeit des Wechselstromwiderstands der Schaltung soll anhand der experimentellen Befunde erläutert und diskutiert werden. Die Qualität der theoretischen Vorhersage soll im Hinblick auf die Messungenauigkeit des Wertes von L und die typischen Bauteiltoleranzen bewertet werden.

Vorbereitung: Wieviele Fehlerbalken der Breite $\pm\sigma$ (Standardabweichung) muss die berechnete Vorhersage treffen, damit man die Übereinstimmung als „gut“ bewerten kann, und die Abweichungen zwischen Experiment und Rechnung auf zufällige (d. h. *normalverteilte*) Messungenauigkeiten zurückzuführen sind?

Für die grafische Darstellung der Messwerte empfiehlt sich die Verwendung des Computers, die Geradenanpassung soll hingegen grafisch, d. h. *nicht* mit dem Computer gemacht werden.

Messung eines Reihenschwingkreises

In diesem Versuchsteil sollen die Resonanzkurve und die Phasenlage eines Reihenschwingkreises als Funktion der Erregerfrequenz bestimmt werden. Die Schaltung ist in Abbildung 9 gezeigt.

Vorbereitung: Wie lässt sich der Reihenschwingkreis aus Abbildung 9 auf dem Steckbrett realisieren, so dass die Erregerspannung und die Stromstärke am Oszilloskop angezeigt werden?

Wie sind R , C und L zu dimensionieren, so dass die Resonanz *scharf* bzw. *breit* ist?

Messung:

- Analog zum Vorversuch werden über den gesamten *messbaren* Frequenzbereich in geeigneten Intervallen die Amplituden der Erregerspannung U_E und der Stromstärke $I_{RLC}(\nu)$ sowie der zeitliche Versatz $\delta t(\nu)$ der beiden Signale am Oszilloskop gemessen.
- Um die Resonanzfrequenz ν_0 möglichst präzise aus den Messwerten bestimmen zu können, sollen in der Region um das Maximum $I_{RLC}(\nu_0)$ einige Messwerte aufgenommen werden (3-5 Werte).

Vorbereitung: Woran erkennt man in der Phasenlage, dass Resonanz erreicht ist?

- Zur Bestimmung der Breite der Resonanz ist es erforderlich, im Bereich der Frequenzen, bei denen die Stromstärke auf $I_{RLC}(\nu_0)/\sqrt{2}$ abgesunken ist, zu beiden Seiten des Maximums ebenfalls ausreichend viele, d. h. 2-3 Werte, aufzunehmen.

Vorbereitung: Weshalb ist es sinnvoll, für die Bestimmung der Breite gerade hier mehrere Punkte zu messen, und nicht z. B. bei der Hälfte des Maximalwertes? Welchen Wert nimmt die Phasenlage bei den beiden Frequenzen an, für die die Stromstärke auf $I_{RLC}(\nu_0)/\sqrt{2}$ abgesunken ist?

- Für Frequenzen weit weg von der Resonanz (z. B. wenn die Stromamplitude $I_{RLC}(\nu)$ unter die Hälfte ihres Maximalwertes gesunken ist), reichen zum weiteren Verlauf der Resonanzkurve wenige Messpunkte aus.
- Ablesefehler sowie die Größen der verwendeten Bauteile müssen protokolliert werden.

Auswertung:

- Die Stromstärke $I_{RLC}(\omega)$ (mit Fehlerbalken) soll als Funktion der *Kreisfrequenz* ω (nicht zu verwechseln mit der *Schwingungsfrequenz* ν) grafisch dargestellt werden.
- Aus den Messwerten soll die Resonanzkreisfrequenz ω_0 und die Breite γ jeweils mit Messungenauigkeit ermittelt werden.
- Mit den experimentell ermittelten Werten ω_0 und γ lässt sich eine theoretische Vorhersage der Resonanzkurve berechnen, die im selben Diagramm mit den Messwerten dargestellt werden soll.
- In derselben Weise soll die Phasenlage $\varphi_{RLC}(\omega)$ der Stromstärke (mit Fehlerbalken) grafisch dargestellt, und daraus erneut Resonanzkreisfrequenz ω_0 und Breite γ mit Messungenauigkeit ermittelt werden. Mit diesen Werten lässt sich wieder eine theoretische Vorhersage für die Phasenlage berechnen und mit dem Experiment vergleichen.

- Die beiden unabhängig experimentell ermittelten Werte für ω_0 und γ sind *geeignet* zu mitteln, und mit der theoretischen Vorhersage an Hand der Werte der verwendeten Bauteile zu vergleichen.
- Die Ergebnisse sind ausführlich zu diskutieren. Die Unsicherheiten der grafischen und numerischen Auswertung sollen bestimmt und bewertet werden.

Auch hier bietet sich für die Erzeugung der grafischen Darstellungen der Messwerte sowie der theoretischen Kurven die Verwendung des Computers an. Numerische Berechnungen, z. B. für die theoretischen Kurven, können ebenfalls mit dem Computer ausgeführt werden.

Zusammenfassung

Das Versuchsprotokoll soll mit einer Zusammenfassung der Aufgabenstellung, des Experimentes, sowie der Messergebnisse abgeschlossen werden. Welche Erkenntnisse hat dieses Experiment geliefert? Nebenfachstudenten sollen einen Bezug herstellen zu ihrem Hauptfach, Lehramtsstudenten zur Erfahrungswelt eines Schülers.

Experiment 2 - Die Wechselstrommessbrücke (E-01.2)

Brückenschaltungen werden häufig verwendet, um die Größen von elektrischen Bauteilen präzise zu bestimmen. Neben Messgeräten in Elektroniklaboren finden Brückenschaltungen zum Beispiel in Waagen Anwendung, in denen das Gewicht über die Änderung des Widerstands von sogenannten *Dehnungsmessstreifen* (DMS) bestimmt wird. Nach demselben Prinzip werden auch vielfältige Kräfte- und Leistungsmesser realisiert.

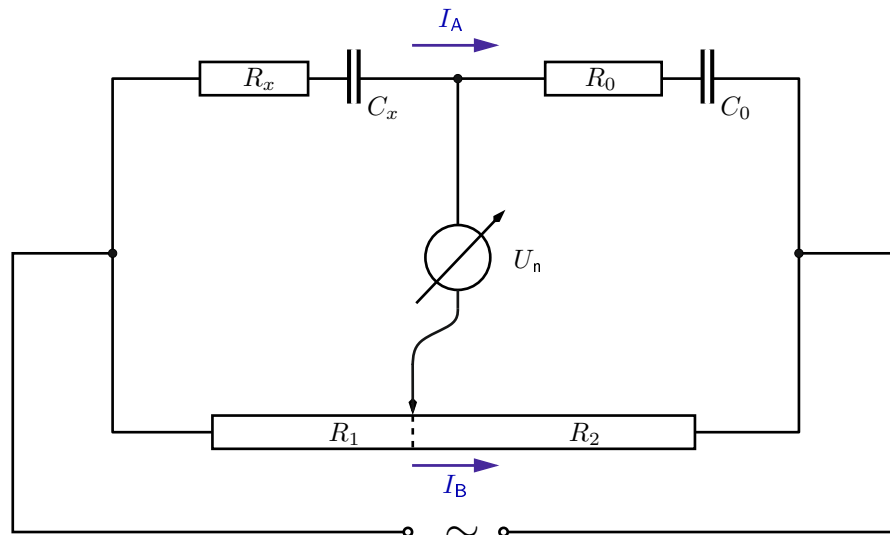


Abbildung 11: Schaltung der Wheatstonebrücke. Die Widerstände R_0 , R_1 , R_2 und die Kapazität C_0 sind gegeben, R_x und C_x sollen bestimmt werden.

Die schematische Darstellung einer sogenannten *Wheatstonebrücke* ist in Abbildung 11 zu sehen. Das Prinzip der Messung beruht darauf, das Messgerät *stromlos* abzugleichen, damit es keinen verfälschenden Einfluss auf das Messergebnis haben kann. Dabei werden drei als bekannt angenommene Widerstände, oder allgemeiner *Impedanzen* benutzt, um den Wert der unbekannten Impedanz zu bestimmen. Für den einfachen Fall rein ohmscher Widerstände findet man die bekannte Bestimmungsgleichung für den unbekannten Widerstand

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_0 . \quad (8)$$

Vorbereitung: Herleitung der *Wheatstone-Formel* (8)

Woher kommen die störenden Einflüsse auf die Messung eines Stroms oder einer Spannung bei Verwendung eines stromdurchflossenen Messgerätes?

Die Brücke wird als *abgeglichen* bezeichnet, wenn keine Spannung über dem Messgerät abfällt, $U_n = 0$. Aus der Herleitung von Formel (8) weiß man, dass dies im Fall von rein ohmschen Widerständen erfüllt ist, wenn die *Amplituden* der Stromstärken I_A und I_B in einem durch die jeweiligen Widerstände gegebenen Verhältnis zueinander stehen (Gleichstromfall). Kommen jedoch kapazitive Beiträge hinzu, so nimmt I_A eine *Phasenverschiebung* gegenüber I_B auf, die ebenfalls so eingestellt werden muss, dass über dem Messgerät keine Differenzspannung abfällt. Anders gesagt müssen zwei Bedingungen, nämlich der Abgleich der *ohmschen* sowie der *kapazitiven* Anteile der Impedanzen gleichzeitig erfüllt werden. Man erreicht den Abgleich daher durch Variation der bekannten Impedanzen.

Aus den Kirchhoffschen Regeln erhält man dann ($U_n = 0$):

$$R_1 I_B(t) = R_x I_A(t) + \frac{Q_A(t)}{C_x} \quad (9)$$

$$R_2 I_B(t) = R_0 I_A(t) + \frac{Q_A(t)}{C_0} \quad (10)$$

Mit dem Ansatz*

$$I_A(t) = \hat{I}_A \cos(\omega t) \Rightarrow Q_A(t) = \frac{\hat{I}_A}{\omega} \sin(\omega t)$$

teilen wir die Gleichungen (9)÷(10), und erhalten

$$\frac{R_1}{R_2} = \text{const.} \quad (11)$$

$$= \frac{R_x \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega C_x} \sin(\omega t)}{R_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega C_0} \sin(\omega t)} \quad (12)$$

$$= \frac{R_x}{R_0} \underbrace{\frac{\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega R_x C_x} \sin(\omega t)}{\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega R_0 C_0} \sin(\omega t)}}_{=1} \quad (13)$$

Der Ausdruck (13) kann nur dann konstant sein, wenn der zeitabhängige Bruch sich identisch wegkürzt. Daraus folgt $R_x C_x = R_0 C_0$,

$$\Rightarrow \frac{R_x}{R_0} = \frac{C_0}{C_x} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{x}{\ell - x} \quad (14)$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass der Widerstand eines homogenen Drahtes proportional zu seiner Länge ist, und in unserem Experiment die beiden Widerstände R_1 und R_2 durch die Abschnitte der Länge x bzw. $\ell - x$ eines Widerstandsdrahtes mit der Gesamtlänge ℓ realisiert sind. Durch elementare Umformungen lassen sich mit Gleichung (14) aus den bekannten bzw. messbaren Größen R_0 , C_0 , x und ℓ die gesuchten Größen R_x und C_x bestimmen.

Messung von komplexen Widerständen mit der Wheatstonebrücke

In diesem Experiment wird eine Wheatstonebrücke verwendet, um die ohmschen und kapazitiven Anteile von fünf Wechselstromwiderständen zu bestimmen.

Schaltung: Die Messbrücke wird nach dem Schaltplan in Abbildung 11 aufgebaut. Abbildung 12 zeigt die Komponenten des Aufbaus auf dem Steckbrett. Als Spannungsquelle dient der Funktionsgenerator. Die beiden Referenzwiderstände R_1 und R_2 sind in Form eines Schleifdrahtes ausgeführt, der einen variablen Abgriff besitzt, durch dessen Position das Verhältnis $\frac{R_1}{R_2}$ bestimmt wird. Die Messung des Nullabgleiches wird mit dem Oszilloskop durchgeführt. Die übrigen Komponenten der Schaltung werden auf dem Steckbrett realisiert, wobei die Spannungsversorgung, die Messbrücke und das Oszilloskop jeweils mit Kabeln in die Schaltung integriert werden.

Vorbereitung: Wie müssen zwei Kondensatorbausteine mit Kapazitäten C_1 und C_2 auf dem Steckbrett kombiniert werden, damit die resultierende Gesamtkapazität durch $C_1 + C_2$ gegeben ist?

*Die Integrationskonstante Q_0 verschwindet, da sich im Mittel über eine Schwingungsdauer keine Ladung auf den Kondensatoren befindet. Sonst wäre die Maschenregel verletzt.

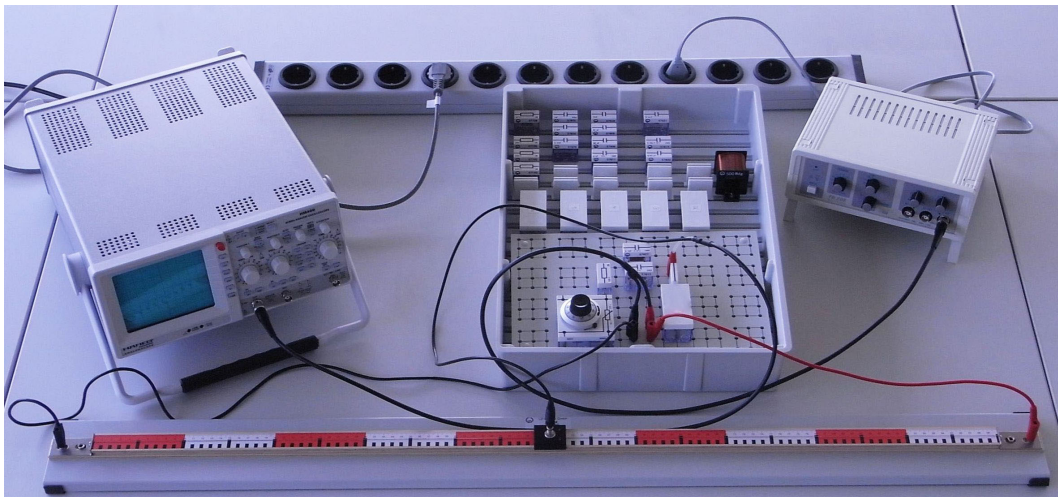


Abbildung 12: Beispiel einer Schaltung auf dem Steckbrett mit den Komponenten für die Wechselstrommessbrücke.

Messung: Die Werte von fünf unbekannten Wechselstromwiderständen, bestehend aus einem ohmschen und einem kapazitiven Anteil, sollen gemessen werden. Der Versuch wird entsprechend des Schaltplans in Abbildung 11 aufgebaut. An Hand des Signals am Oszilloskop wird eine geeignete Frequenz und Amplitude am Funktionsgenerator eingestellt. Vor Beginn jeder Messung sollte der Abgriff des Schleifdrahtes genau in die Mitte gebracht werden. Der Nullabgleich erfolgt dadurch, dass zunächst durch eine geeignete Wahl des gegebenen Widerstandes und der Kapazität das Minimum des Signals am Oszilloskop gesucht wird. Dazu werden abwechselnd die Kapazität und der Widerstand variiert, indem Steckbausteine ausgetauscht oder miteinander kombiniert werden. Dabei muss die Empfindlichkeit des Oszilloskops an die Signalstärke angepasst werden. Zuletzt wird der Feinabgleich mit dem Schleifkontakt vorgenommen.

Vorbereitung: Was begrenzt bei dieser Vorgehensweise die Ungenauigkeit in den gemessenen Größen R_0 , C_0 und x ?

Physikstudenten sollen zeigen, dass die relative Unsicherheit von R_x ein Minimum bei $x = \frac{\ell}{2}$ annimmt, wenn man die Unsicherheit in ℓ vernachlässigt.

Auswertung: Mit Hilfe der Gleichungen (14) werden aus den Messwerten die ohmschen und kapazitiven Anteile der fünf untersuchten Wechselstromwiderstände berechnet. Die kombinierten Unsicherheiten werden nach der Methode von Gauß berechnet und diskutiert. Dabei ist es sinnvoll, zunächst die einzelnen Beiträge zu den Unsicherheiten zu betrachten, und zu überlegen, welche davon möglicherweise vernachlässigt werden können.

Zusammenfassung

Das Versuchsprotokoll soll mit einer Zusammenfassung der Aufgabenstellung, des Experimentes, sowie der Messergebnisse abgeschlossen werden. Welche Erkenntnisse hat dieses Experiment geliefert? Nebenfachstudenten sollen einen Bezug herstellen zu ihrem Hauptfach, Lehramtsstudenten zur Erfahrungswelt eines Schülers.

Stückliste

- 1 Oszilloskop
- 1 Schleifwiderstandsdraht mit verschiebbarem Abgriff
- 1 Funktionsgenerator
- 1 Steckbrett
- 5 Widerstände (47Ω , 100Ω , $2 \times 200\Omega$, 470Ω)
- 1 regelbarer Widerstand (0 - 1000Ω)
- 12 Kondensatoren (1nF , $2 \times 2.2\text{nF}$, 4.7nF , 10nF , $2 \times 22\text{nF}$, 47nF , $0.1\mu\text{F}$, $2 \times 0.22\mu\text{F}$, $0.47\mu\text{F}$)
- 1 Spule (500 Windungen)
- 10 Brückenstecker
- 5 unbekannte Wechselstromwiderstände
- 4 Kabel BNC auf Bananenstecker (davon ein spezielles für Schleifdraht)
- 2 Messleitungen

Anhang

Reellwertige Darstellung der Schwingungsgleichung

Die Differenzialgleichung (5) für den Schwingkreis kann auch in der reellwertigen Darstellung gelöst werden. Für die Erregerspannung wird daher ein Ansatz $U_E(t) = U_0 \sin(\omega t)$ gemacht:

$$U_0 \sin(\omega t) = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} + L\dot{I}(t). \quad (15)$$

Dieser Ausdruck stellt eine Differentialgleichung für die Ladung $Q(t)$ dar. Die messbare Größe ist jedoch nicht die Ladung, sondern die Stromstärke $I(t) = \dot{Q}(t)$. Durch zeitliche Ableitung der Gleichung (15) erhält man eine Differentialgleichung für die Strömstärke,

$$\gamma\omega\hat{I}_0 \cos(\omega t) = \omega_0^2 I(t) + \gamma\dot{I}(t) + \ddot{I}(t), \quad (16)$$

wobei wir die oben eingeführten Symbole (7) benutzt haben. Wir machen den reellwertigen Lösungsansatz

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ &= I_0 (\sin(\omega t) \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \sin(\varphi)) \\ \dot{I}(t) &= \omega I_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \omega I_0 (\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)) \\ \ddot{I}(t) &= -\omega^2 I_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ &= -\omega^2 I_0 (\sin(\omega t) \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \sin(\varphi)), \end{aligned} \quad (17)$$

wobei wir die Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung eingeführt und Additionstheoreme für \sin und \cos verwendet haben. Wir setzen (17) in (16) ein, und finden durch Vergleich der Koeffizienten von $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$:

$$0 = I_0 (\omega_0^2 \cos(\varphi) - \gamma\omega \sin(\varphi) - \omega^2 \cos(\varphi)) \quad (18)$$

$$\gamma\omega\hat{I}_0 = I_0 (\omega_0^2 \sin(\varphi) + \gamma\omega \cos(\varphi) - \omega^2 \sin(\varphi)). \quad (19)$$

Die Lösung von Gleichung (18) liefert die Phasenlage (*Vorbereitung*). Die Amplitude des Stroms $I_0(\omega)$ ergibt sich damit aus Gleichung (19), und man findet erneut das Ergebnis (6) von oben:

$$I_0(\omega) = \frac{\hat{I}_0 \gamma \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}.$$