Struktur der Materie - Festkörperphysik
Übungsblatt 4

Besprechung am Do. 12. Dez. 2013
ACHTUNG: die Übung findet im Seminarraum THP statt

Aufgabe 4.1: Freies Elektronengas

Berechnen Sie die Zustandsdichte des freien Elektronengases in $d = 1, 2, 3$ Dimensionen in Abhängigkeit von der Elektronendichte N/L^d. Bestimmen Sie jeweils die Fermienergie.

Lösung: Anzahl Zustände im k-Raumvolumen $W_k^{(d)}$: $n_d(k) = 2\frac{W_k^{(d)}}{(2\pi/L)^d}$ (beachte Faktor 2 für Spinrichtungen!); $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $n_d(\varepsilon_\mathrm{F}) = N$, $\rho_d(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} n_d(\varepsilon)$

d = 1: $\varepsilon_\mathrm{F}^{(1)} = \frac{N^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$, $\rho_1(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2m}L}{2\pi\hbar}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

d = 2: $\varepsilon_\mathrm{F}^{(2)} = \frac{N\pi\hbar^2}{mL^2}$, $\rho_2(\varepsilon) = \frac{mL^2}{\pi\hbar^2} = \mathrm{const.}$

d = 3: $\varepsilon_\mathrm{F}^{(3)} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3N\pi^2}{L^3}\right)^{2/3}$, $\rho_3(\varepsilon) = \frac{L^3}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$

Aufgabe 4.2: Rechenaufgabe - Beispiele

Berechnen Sie die Fermienergie, die Fermigeschwindigkeit und die Fermitemperatur unter der Annahme eines freien Elektronengases für

a) Silber mit der Dichte $\rho = 10.5\mathrm{g/cm}^3$ und der molaren Masse $M_\mathrm{mol}107.87$ g/Mol; nehmen Sie ein Leitungsband mit einem Elektron pro Atom an
Lösung: $N/L^3 = N/V = \frac{M}{V}\frac{N}{M} = \rho\frac{N_\mathrm{A}}{M_\mathrm{mol}} \Rightarrow \varepsilon_\mathrm{F} = 5.50$ eV, $v_\mathrm{F} = 1.39 \times 10^6$ m/s, $T_\mathrm{F} = 63842$ K.
b) Aluminium mit fcc-Struktur und einer pseudokubischen Gitterkonstante $a = 4.04$ Å; nehmen Sie hier ein Leitungsband mit 3 Elektronen pro Atom an.
Lösung: fcc $\Rightarrow$ 4 Atome/EZ, 3 Elektronen/Atom $\Rightarrow N/V = 3\cdot 4/a^3$, $\varepsilon_\mathrm{F} = 11.7$ eV, $v_\mathrm{F} = 2.0\times 10^6$ m/s, $T_\mathrm{F} = 135867$ K.

Aufgabe 4.3: Mittlere kinetische Energie

Berechnen Sie die mittlere kinetische Energie eines Elektrons im freien Elektronengas mit einer Fermienergie von 5 eV bei $T = 0$.
Lösung: $\langle E_\mathrm{kin}/T = 0)\rangle = \int_0^{E_\mathrm{F}} \mathrm{d}\varepsilon\rho(\varepsilon)\varepsilon = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{V}{2\pi^2}\int_0^{E_\mathrm{F}}\varepsilon^{3/2}\mathrm{d}\varepsilon = \frac{3}{5}E_\mathrm{F}N \Rightarrow$ kinetische Energie/Elektron $= \frac{3}{5}E_\mathrm{F} = 3$ eV (n.b. $\int_0^{E_\mathrm{F}}\mathrm{d}\varepsilon\rho(\varepsilon) = N$).

Aufgabe 4.4: Leitfähigkeit von Silber

Silber hat eine hohe Leitfähigkeit ($\sigma = 6\times 10^7/\Omega\mathrm{m}$), viele seiner Eigenschaften können im Modell eines (quasi-)freien Elektronengases beschrieben werden. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke, die erforderlich ist, um die Fermikugel um 0.01 k_F zu verschieben. Verwenden Sie dazu die Fermienergie von Silber aus Aufgabe 4.2 sowie die Hallkonstante $R_\mathrm{H} = -9\times 10^{-11}$ m^3/C. Bestimmen Sie weiterhin die resultierende Stromdichte und die mittlere freie Weglänge der Elektronen. Lösung: $\hbar\Delta k = eE\tau \Rightarrow j = 1.55\times 10^{14}$ A/m^2, $E = 2.58\times 10^6$ V/m, $\ell = 427$ Å.