

Experimentalphysik für Studierende der Naturwissenschaften

Wintersemester 2013/14

Priv.-Doz. Dr. Carsten Busse

II. Physikalisches Institut

Raum 227

Tel.: 3570

E-Mail: busse@ph2.uni-koeln.de

Webseite: www.ph2.uni-koeln.de/exphys_natwiss_13.html

Vorlesungsfolien, Skript, Übungen als PDF,
Ankündigungen,...

User: physnat

Password: ws1314

Personen

Demonstrationsexperimente:

Dr. Rolf Berger & Frank Krämer

Fachtutorium Biologie

Di. 13:00-14:30 bzw. Mi. 13:00-14:30

HS Biozentrum (Start 29.10)

Ferdinand Farwick zum Hagen, BSc

Übungen

Donnerstag 10:00-11:30

14 parallele Gruppen

Dipl.-Phys. Fabian Craes + Team



Organisation

- **Terminplanung für das WS 2013 / 2014**
- **Modul Physik: Biologie Chemie Geowissenschaften ...**
- **Vorlesung: Mo. 16 – 17.30 und Do. 10 – 11.30 Uhr**
(Do. im 14 tägigen Wechsel mit den Übungen)
- im Hörsaal I, Physikalische Institute
- **Klausur:**
 - 4.8.2014, 12-14 Uhr, Hörsaal I (Physik) und Kurt-Alder-Hörsaal (Chemie)
 - 1.10.2014, 12-14 Uhr, Hörsäle I-II (Physik)
 - 22.11.2014, 9-11 Uhr, Hörsaal I (Physik)
- **Weihnachtsferien bis einschließlich 6.1.2014 (keine Vorlesung)**

Übungen

- **Übung** Do. 10 – 11.30 Uhr
- **Biologie/Chemie/Biochemie:** Abgabe der Übungen (3er-Gruppen), Teilnahme an Übungsgruppen, >50% der Punkte, 1 x vorrechnen, höchstens 2 x 0 Punkte
- **Anderer:** Globalübungen (keine Korrektur)
- **Ausgabe der Zettel:** Download nach jeder zweiten Montagsvorlesung, Start heute
- **Abgabe der Zettel:** jeweils vor der folgenden Montagsvorlesung
- **Besprechung der Zettel:** in der folgenden Übung (Donnerstag)
- Termine:

43. KW	Do. 24.10.2013
45. KW	Do. 07.11.2013
47. KW	Do. 21.11.2013
49. KW	Do. 05.12.2013
51. KW	Do. 19.12.2013
03. KW	Do. 16.01.2014
05. KW	Do. 30.01.2014
- **Gruppen 1-6 für Biologen, Gruppen 8-12 für Chemiker, Gruppe 13 für Biochemiker, Gruppe 14 für den Rest**
- **Anmeldung für Biologie / Chemie / Biochemie:** Nach dieser Vorlesung durch Eintragen in die entsprechenden Listen – Bitte Studiengang beachten! -

Motivation



Motivation



Richard Feynman 1918-1988
Nobelpreis (Physik) 1965

“Nature does not care what we call it”

Einleitung

Weshalb:

Moderne Arbeitsgebiete sind stark **interdisziplinär**:

Biophysik, Physikalische Chemie, Biochemie, Geophysik

-> Natur ist einheitlich, kennt diese Unterscheidung nicht !

-> physikalische Naturgesetze stellen Rahmen für **alle** Naturwissenschaften dar

physikalische **Methoden** zur Problemlösung:

Quantifizierung („Experimente“) ↔ Modellbildung („Theorie“)

-> Vorlesung

-> Physikalisches A-Praktikum (1. und 2. Physikalisches Institut)

Einleitung

Ziel dieses Kurses:

- *physikalisches Basiswissen für Naturwissenschaftler*
- *anschauliches Verständnis der Physik*

Beantwortung von Fragen:

- Wie untersuche ich physikalische Effekte?
- Wie verwende ich physikalische Formeln?
- Wie wertet man experimentelle Messgrößen aus?

Einleitung

Wie:

Problem: Große Stoffmenge, wenig Zeit, wenig Wiederholungen.
Schulische Vorbildung ? Mathematik ?

Dozent: Interesse wecken, Zusammenhänge aufzeigen, Schwerpunkte setzen
(Unterschied Schule / Universität)

Arbeiten und begreifen müssen **Sie selbst** !

- während der Vorlesung: mitdenken, Kommentare aufnehmen, fragen !
- Nacharbeiten der Vorlesung unverzichtbar (→ Lehrbuch & Skript !)
(zumindest die Zusammenfassungen lernen !)

Literaturempfehlung: Halliday, Resnick, Walker Physik (Bachelor-Edition)

- Vorbereiten und Nachbereiten der Vorlesungen
- Diskutieren!
- Übungsaufgaben lösen (gerne gemeinsam)

Einleitung

Spezielle „Gefahr“ bei der Bewältigung dieses Moduls:

Dieses Semester:

Vorlesung und Übungen

-> keine schwierige Abschlussprüfung

(„nur“ Übungsschein ...)

-> „Andere Veranstaltungen sind wichtiger weil hier eine Abschlussprüfung folgt.“

Nächstes Semester:

A-Praktikum

-> aufbauend auf Vorlesung („schwieriger“)

Danach: **Modulabschlussprüfung** (für die meisten: **Klausur**)

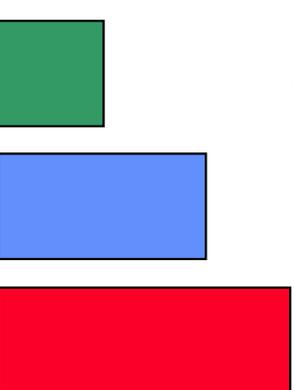
Zwei Szenarien:

Arbeitsaufwand

a)



b)



Übersicht

1. **Grundbegriffe:**
Physikalische Größen und Einheiten, Fehlerrechnung
2. **Mechanik starrer Körper:**
Kinematik, Dynamik (Kräfte, Impuls, Arbeit, Energie, ...)
Harmonische Schwingungen
3. **Mechanik deformierbarer Körper:**
Festkörper, Grenzflächen, Hydrostatik, Hydrodynamik
4. **Wärmelehre**
Temperatur, Wärme, ideales Gas, ...
5. **Elektrizitätslehre, Magnetismus**
Ladung, Spannung, Strom, Widerstand, E-Feld, B-Feld, ...
6. **Optik**
7. **Ausblick:** Atom- und Kernphysik

1.1 Physikalische Größen und Einheiten

Grundlage für **quantitative Beschreibung: Messung**

Vergleich der beobachteten Größe mit Standardgröße, der **Einheit**

Jede physikalische Größe ist das (mathematische) Produkt aus einer **Maßzahl** und einer **Einheit**

Bsp.: Länge $l = 5\text{ m}$ Maßzahl: 5, Einheit: Meter

$l = 500\text{ cm}$ Maßzahl: 500, Einheit: Zentimeter

Einheit wird definiert *Bsp.: Länge: Meter, Zoll, Meile, ...*

Soll allgemein bekannt, **reproduzierbar**, bequem anwendbar sein.

Physikalische Größe ist **unabhängig** von Wahl der Einheit, nur Zahlenwert hängt von der Einheit ab!

Mit Einheiten kann man rechnen:

*Bsp.: Strecke = Geschwindigkeit * Zeit, $s = 1\text{ m/s} \cdot 5\text{ s} = 5\text{ m}$*

*Volumen = Fläche * Länge, $V = 1\text{ m}^2 \cdot 2\text{ m} = 2\text{ m}^3$*

bei Funktionen: $\cos(1\text{m} / 3\text{m}) = \cos(1/3)$

Nur Maßzahlen mit gleicher Einheit dürfen addiert werden!

1.1 Physikalische Größen und Einheiten

Einheitensystem: Zurückführung **aller** physikalischen Einheiten auf unabhängige **Basiseinheiten**

Internationale Übereinkunft: **SI** (Système International, auch: MKSA-System)

- Länge: $\{m\}$ **Meter** (def. über Lichtgeschwindigkeit)
- Masse: $\{kg\}$ **Kilogramm** (def. über Urkilogramm in Paris)
- Zeit: $\{s\}$ **Sekunde** (def. über period. Vorgänge in Cs-Atomen, Spektrallinie)
- elektr. Stromstärke: $\{A\}$ **Ampere** (def. über Kraftwirkung zweier el. Ströme)
- Temperatur: $\{K\}$ **Kelvin**
- Stoffmenge: $\{mol\}$ **Mol**
- Lichtstärke: $\{cd\}$ **Candela**

Andere Größen: **abgeleitete Einheiten**

Bsp.: *Geschwindigkeit* $\{m/s\}$, *Volumen* $\{m^3\}$

oft eigene Namen:

oft sind auch nicht SI-Einheiten sinnvoll und hilfreich:
 Minute, Stunde, km/h,
 Ångström, Lichtjahr, Meile, Gallone,
 Pfund, Kalorie, ...

Bsp.: *Frequenz*: 1 Hertz $\{1/s\}$; *Leistung*: 1 Watt $\{kg\ m^2/s^3\}$

1.1 Physikalische Größen und Einheiten

Wissenschaftliche Notation:

Darstellung von Zahlenwerten in der Form $a \cdot 10^b$, $1 \leq a < 10$, b ganze Zahl

Vorteil: Schneller Überblick über Größenordnung, schneller Vergleich

Beispiel:

$$1\,500\text{ m} = 1,5 \cdot 10^3\text{ m}$$

$$0,0234\text{ s} = 2,34 \cdot 10^{-2}\text{ s}$$

Alternative Darstellung (Taschenrechner):

$$1500 = 1,5 \text{ E}3 = 1,5 \cdot 10^3$$

1.1 Physikalische Größen und Einheiten

Präfixe

(mathematische Vorfaktoren)

Zenti: c	10^{-2}
Dezi: d	10^{-1}
Femto: f	10^{-15}
Piko: p	10^{-12}
Nano: n	10^{-9}
Mikro: μ	10^{-6}
Milli: m	10^{-3}
Kilo: k	10^3
Mega: M	10^6
Giga: G	10^9
Tera: T	10^{12}

in der Natur auftretende Längen:

> 40 Größenordnungen

Proton, kl. Kerne $10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$

weiteste sichtbare Galaxie 10^{26} m

Film: „Powers of ten“

in der Natur auftretende Zeiten:

> 40 Größenordnungen

Lebensdauer kurzlebiger

Elementarteilchen 10^{-23} s

Alter der Milchstraße 10^{18} s

in der Natur auftretende Massen:

> 80 Größenordnungen

Elektron 10^{-30} kg

Sonne 10^{30} kg

Universum 10^{53} kg

Nobelpreis für Physik 2013



Francois Englert



Peter Higgs

“For the theoretical discovery of a mechanism that contributes to our understanding of the origin of mass of subatomic particles, and which recently was confirmed through the discovery of the predicted fundamental particle, by the ATLAS and CMS experiments at CERN's Large Hadron Collider”

1.1.1 Längenmessung

Mittelalterliche Längeneinheit: 1 Fuß („Durchschnittfuß“ ?)

1799 Pariser Urmeter: Abstand zw. 2 Ritzmarken bei 0°C und 760 Torr

So gewählt, dass Erdumfang 40 000 km

Aber: ändert sich (Rekristallisation)

nicht genauer als 10^{-7} m ablesbar

Erdumfang ist nicht genau 40 000 km

1983 Def. über **Naturkonstante**: Lichtgeschwindigkeit $c = 299\,792\,458$ m/s

1m = Strecke, die Licht in $(1/299\,792\,458)$ s durchläuft

Innerhalb Messgenauigkeit stimmen altes und neues Meter überein

Messung: Zollstock

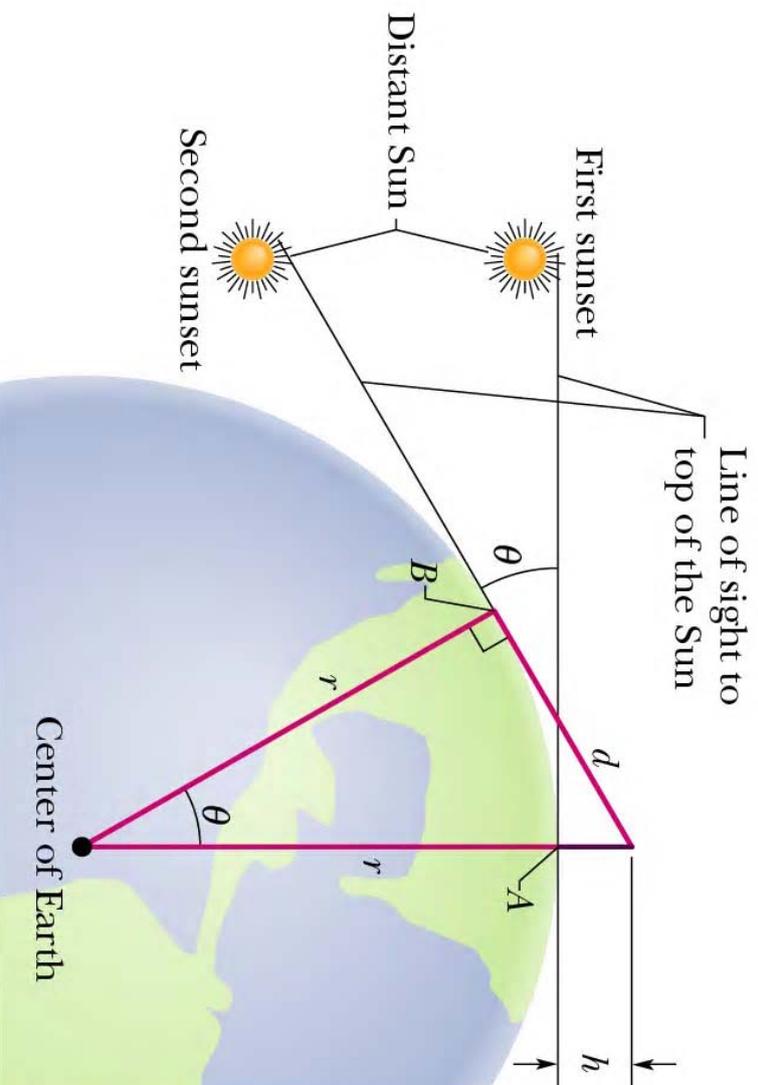
aber: wie messen wir sehr große / sehr kleine Längen ?

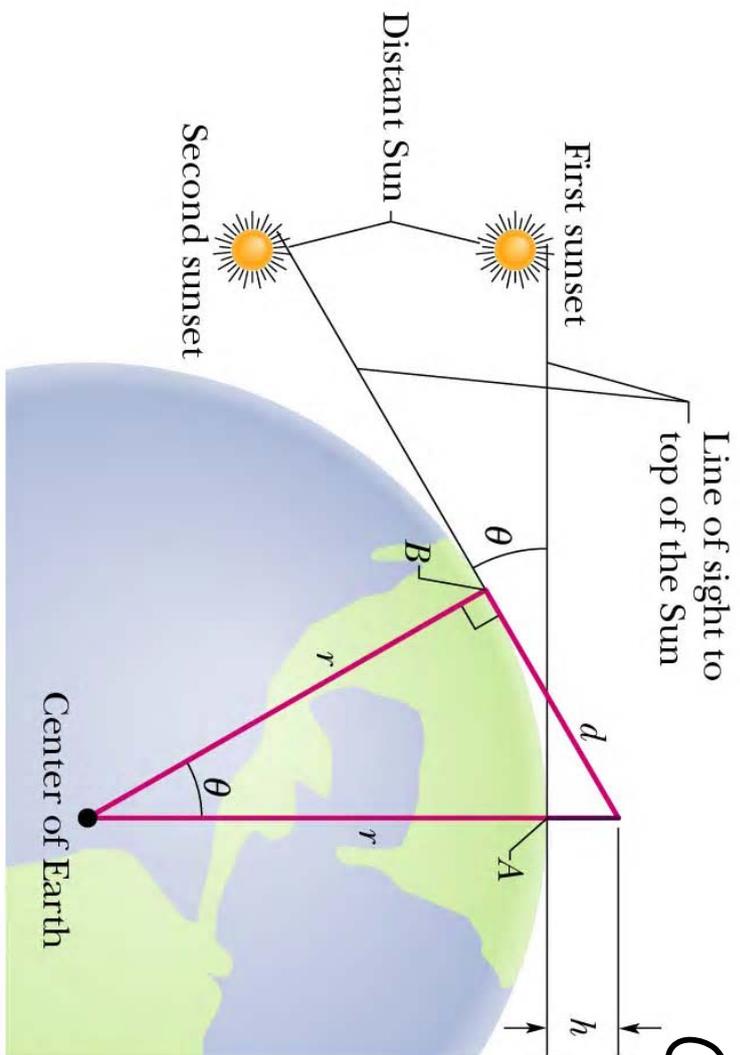
1.1.1 Längenmessung

Messung sehr großer Längen: **Triangulation**

Bsp.: Durchmesser d der Erde (Radius $r=d/2$)

Beobachtung: Sonnenuntergang am Strand im Liegen und im Stehen (Δt)





$$(1) \cos \theta = \frac{r}{r+h}$$

$$(2) \theta = \frac{\Delta t}{24h} \cdot 360^\circ$$

Ans (1)

$$\theta = \arccos \left(\frac{r}{r+h} \right)$$

mit (2)

$$\Rightarrow \frac{\Delta t}{24h} \cdot 360^\circ = \arccos \left(\frac{r}{r+h} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{24h}{360^\circ} \cdot \arccos \left(\frac{6400000 \text{ m}}{64000015 \text{ m}} \right) = 5.45$$

$$\cos \theta = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{Gegen Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$$



1.1.1 Längenmessung

Messung sehr kleiner Längen:

Genauigkeit:

Zollstock $0.5 \text{ mm} = 5 * 10^{-4} \text{ m}$ (1/2 Skalenteil)

Schieblehre (Nonius) $0.05 \text{ mm} = 5 * 10^{-5} \text{ m}$

Mikrometerschraube $0.005 \text{ mm} = 5 * 10^{-6} \text{ m} = 5 \text{ } \mu\text{m}$

Licht-Mikroskop $\sim 0.0005 \text{ mm} = 5 * 10^{-7} \text{ m} = 500 \text{ nm}$

Wellenlänge sichtbares Licht: 400-800 nm

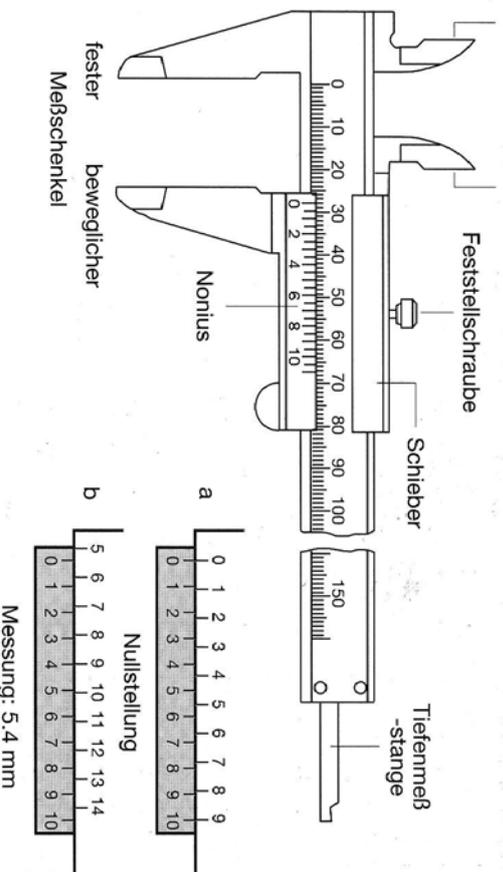
Elektronenmikroskop $\sim 0.5 \text{ nm} = 5 * 10^{-10} \text{ m}$

Rastertunnelmikroskop $\sim 0.1 \text{ nm} = 1 \text{ } \text{Å}$ strom

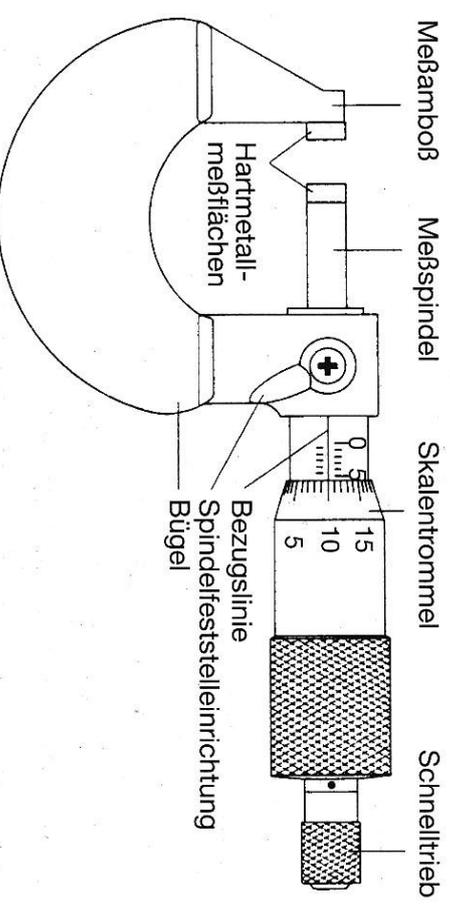
(STM = *scanning tunneling microscope*)

Schneidentförmige
Meßflächen
für Innenmessung

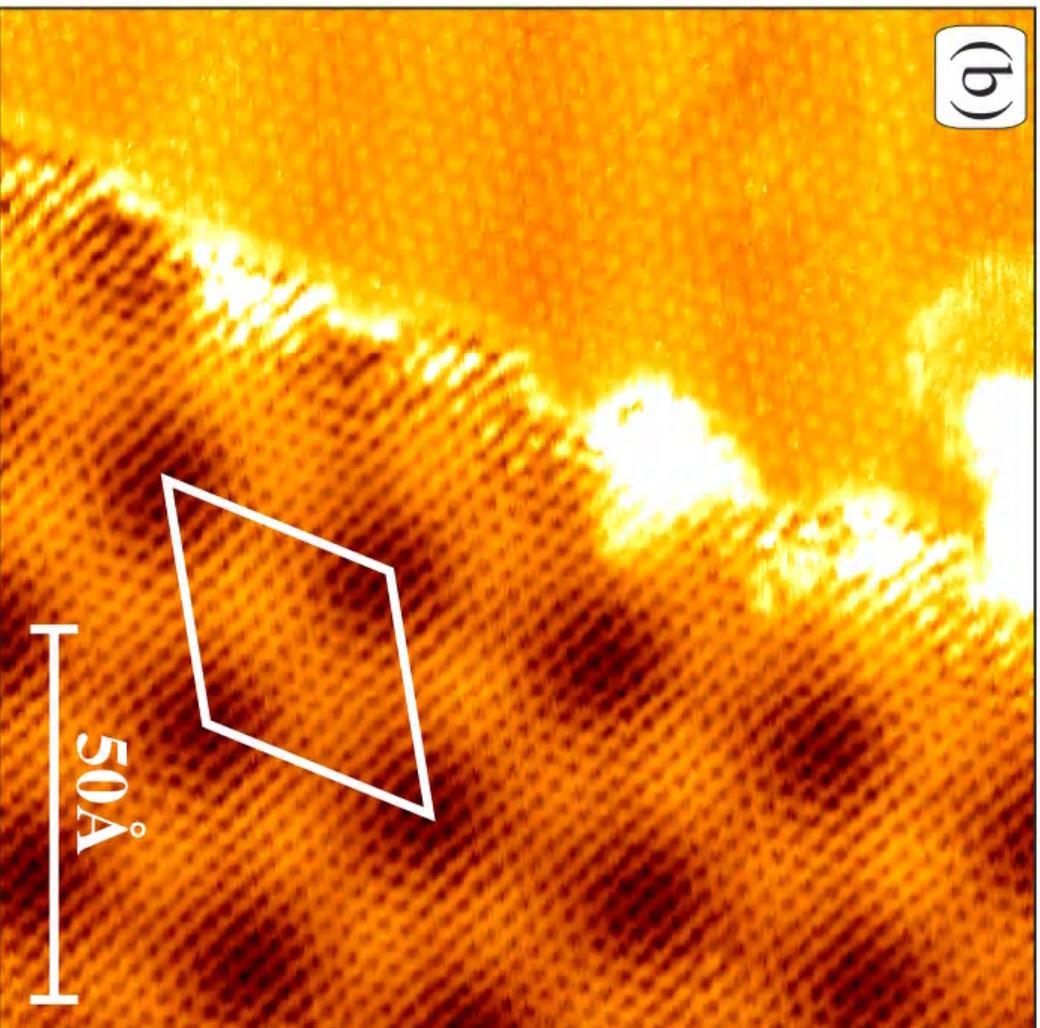
Schieblehre mit Nonius



Mikrometerschraube



1.1.1 Längenmessung: Bsp. STM an Graphen



A. T. N'Diaye, J. Coraux, T. N. Plasa, C. Busse, T. Michely,
N. J. Phys. 10, 043033 (2008)

1.1.2 Zeitmessung

Vergleich mit **periodischen Vorgängen** (Periodendauer T) $t \approx n \cdot T$

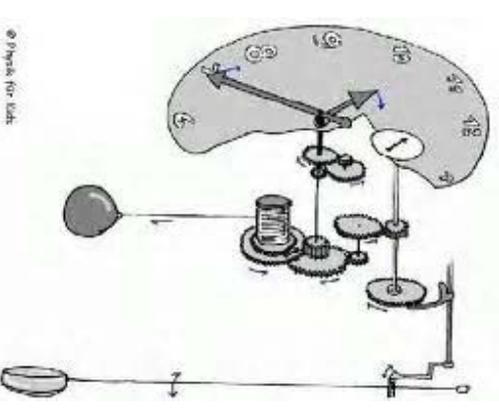
Bsp.: Wechsel Tag/Nacht: $T = 24 \text{ h}$

Pendel, Herzschlag, Schwingung einer Violinseite

Frequenz: $\nu = 1 / T$ mit SI Einheit *Hertz*, $1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$

Gibt an, wie oft sich ein Vorgang pro Sekunde wiederholt.

$T=10^{-9}\text{s} \rightarrow \nu=10^{+9} \text{ Hz} = 1 \text{ GHz}$

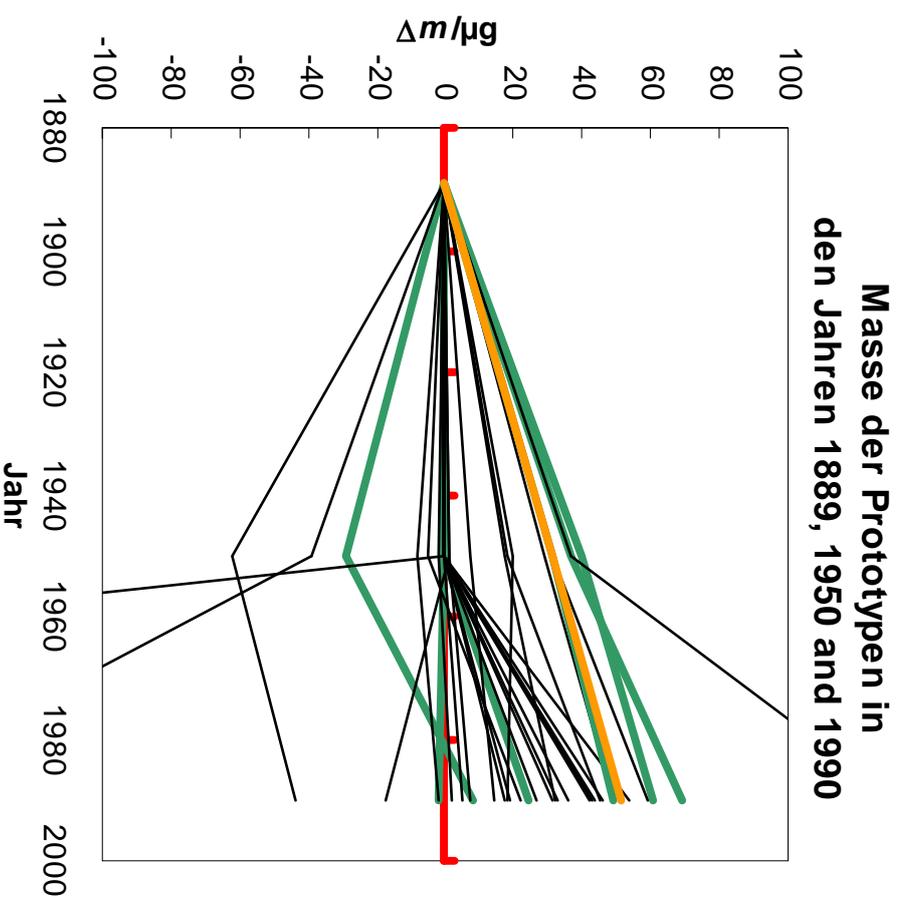
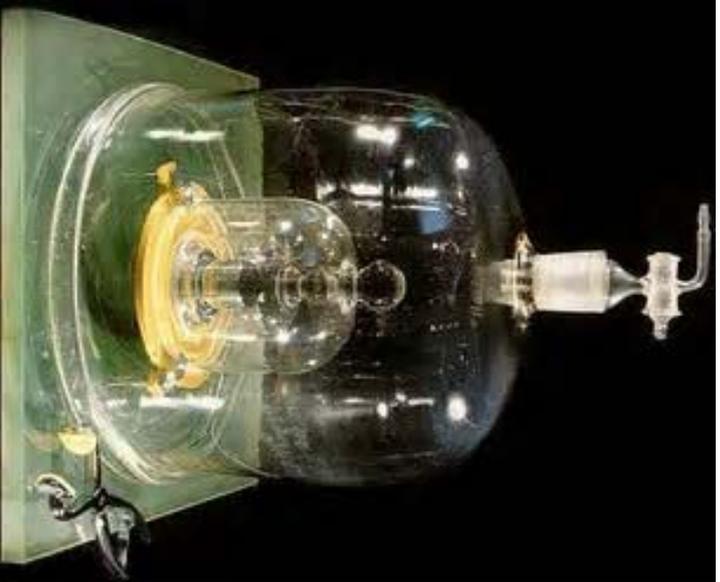


Moderne Variante: Quarzuhr – elektronisch angeregte Schwingung eines Quarzkristalls

Atomuhr: Frequenz einer Spektrallinie des Cs-Atoms als Eichnormal.

1.1.3 Messung von Massen

Heute immer noch
Vergleich mit dem
Ur-Kilogramm
in Paris.



Vergleich mit
Referenzmassen:
Mehrheit davon
wird schwerer
⇒ **Ur-Kilogramm**
wird leichter
(z.B. verliert gelösten
Wasserstoff)
⇒ intensive Suche nach
Eichstandard

1.1.4 Winkelmaße

Winkelmaße, ebene Winkel

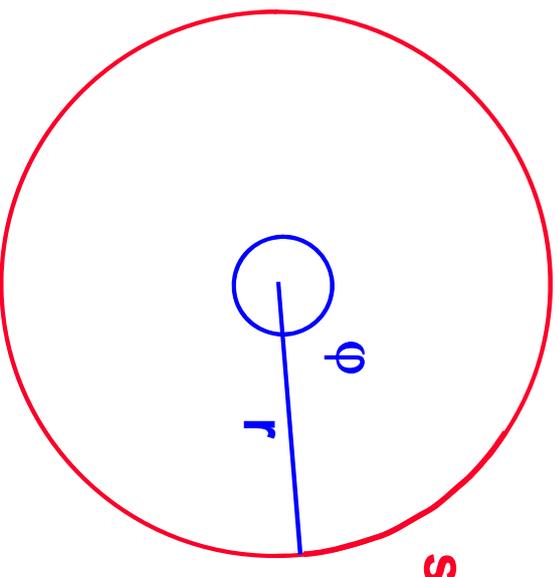
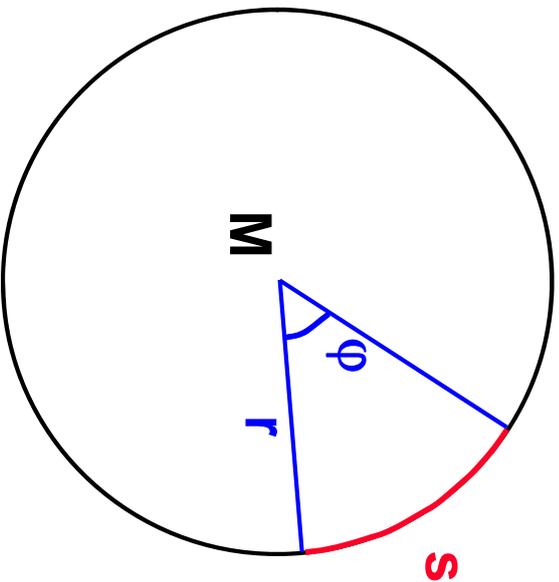
Bogenmaß: $\varphi = s / r$

SI-Einheit: 1 rad = 1m/m (Radian)

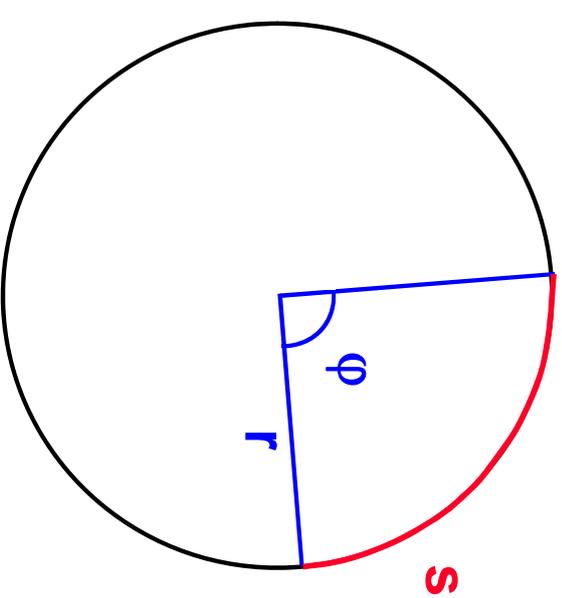
Bsp.: $\cos(\varphi) = \cos(2m/1m) = \cos(2 \text{ rad}) = \cos(2)$

Vollkreis: 2π rad oder 360°

Umrechnung: $\varphi(\text{rad}) / \varphi(^{\circ}) = 2\pi \text{ rad} / 360^\circ$



$$\varphi = 2\pi = 360^\circ$$



$$\varphi = \pi/2 = 90^\circ$$

1.1.5 Messfehler

Signifikante Stellen:

Jede Messung hat immer nur eine begrenzte Genauigkeit. Jede zuverlässig bekannte Stelle wird **signifikante Stelle** genannt.

Beispiele:

$1,5 \cdot 10^3 \text{ m}$: 2 signifikante Stellen

$2,34 \cdot 10^{-2} \text{ s}$: 3 signifikante Stellen

Aufpassen: $2,34 \cdot 10^{-2} \text{ s} = 0,0234 \text{ s}$, trotzdem nur 3 signifikante Stellen, nicht 5!

Mit dieser Konvention ist die Angabe einer Null als letzte Stelle sinnvoll:

$1,5 \cdot 10^3 \text{ m}$: 2 signifikante Stellen (Länge liegt zwischen 1450 m und 1550 m)

$1,50 \cdot 10^3 \text{ m}$: 3 signifikante Stellen (Länge liegt zwischen 1495 m und 1505 m)

1.1.5 Messfehler

Rechenoperationen:

Keine extreme Genauigkeit durch Umrechnen vortäuschen!

Beispiel:

Quadratisches Zimmer hat Fläche $F \approx 18 \text{ m}^2$

Breite b der Wände: $b = \sqrt{F} = 4,242640687 \text{ m}$ **QUATSCH**

Faustregel: Zahl der signifikanten Stellen beibehalten

Also: $b \approx 4,2 \text{ m}$

1.1.5 Messfehler

Wenn der Messfehler bekannt ist, wird er mit angegeben:

$$\text{Messgröße} = (\text{Zahlenwert} \pm \text{Messfehler}) \cdot \text{Einheit}$$

Beispiel: Messung von Längen mit dem Lineal:

Breite meines Notebooks: $(37,25 \pm 0,05)$ mm

Eine Angabe mit von Stellen jenseits des Fehlers ist sinnlos, ebenso ein Fehler mit mehreren signifikanten Stellen.

Ist der Messfehler nicht explizit angegeben, entspricht er der letzten Stelle:

$$10.0 \text{ kg} = (10.0 \pm 0.1) \text{ kg}; \quad 230 \text{ km} = (230 \pm 1) \text{ km}$$

$$\text{absoluter Fehler: } x \pm \Delta x \quad \text{relativer Fehler: } \Delta x/x \quad (\text{z.B. } 1\%)$$

1.1.5 Messfehler

Statistischer Fehler in direkter Messung einer Einzelgröße:

Messwerte x_i schwanken um arithmetischen Mittelwert:

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$$

bei n Messungen unter unveränderten Bedingungen

Empirische Standardabweichung

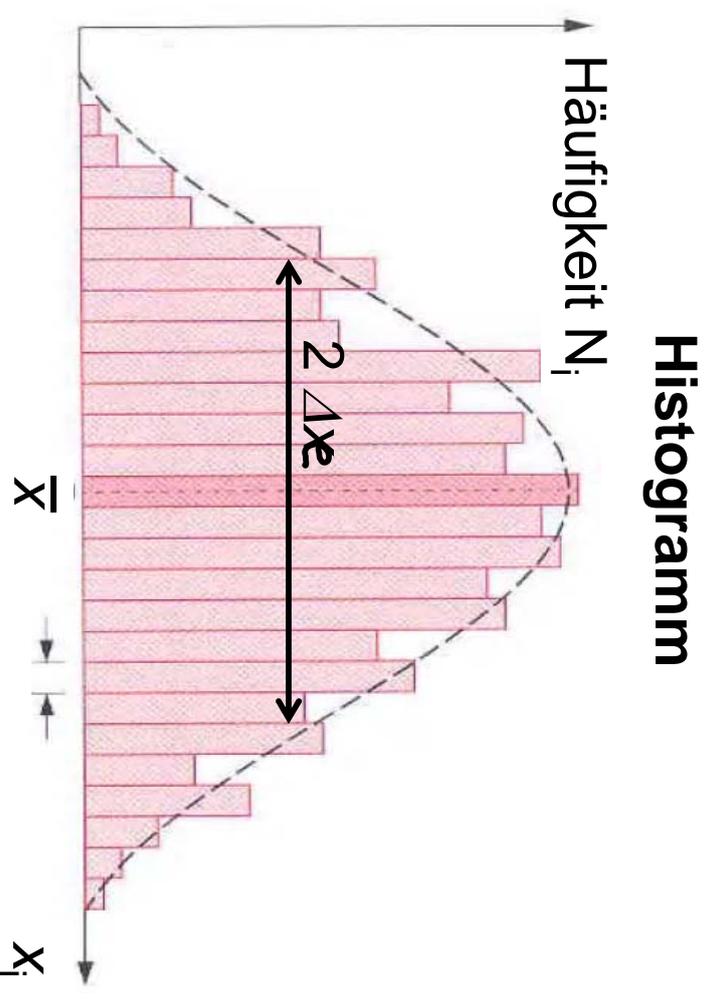
mittlerer Fehler der Einzelmessung
(insgesamt n Messungen)

$$\Delta x_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Mittlerer Fehler des Mittelwerts

$$\Delta \bar{x} = \Delta x_e / \sqrt{n}$$

Bsp.: $n_1 = 100$, $n_2 = 10000 \rightarrow \Delta \bar{x}$ um eine Größenordnung kleiner

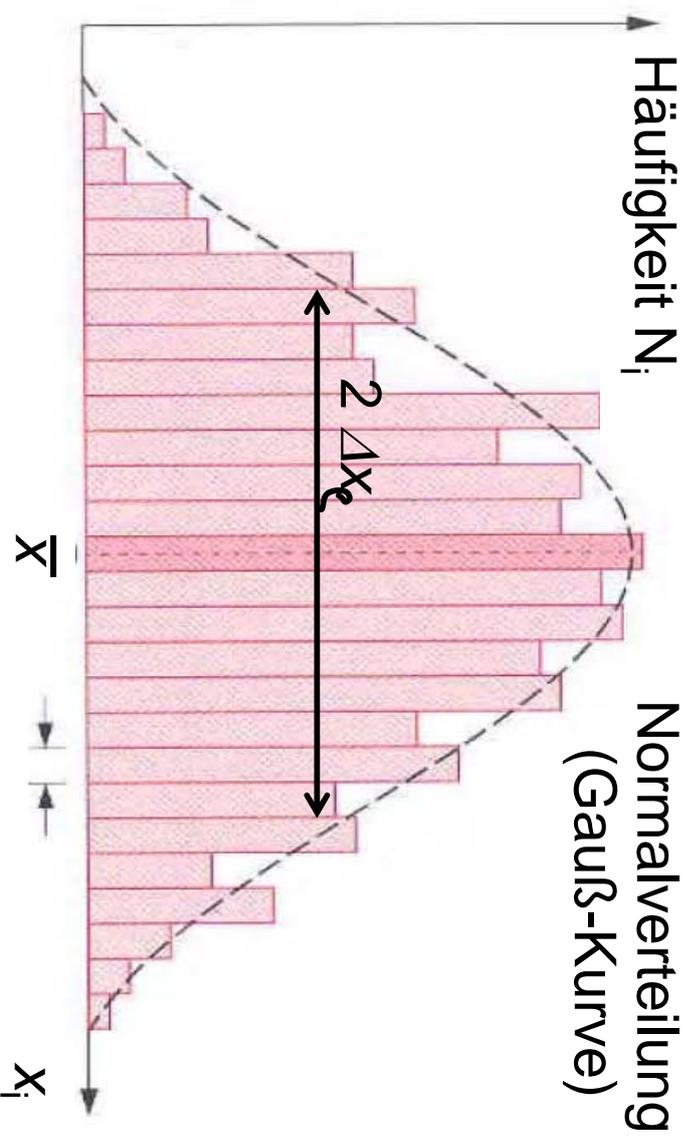


1.1.5 Messfehler

Gaußverteilung (Normalverteilung)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \Delta x_e} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{\Delta x_e} \right)^2 \right)$$

Histogramm



2/3 alle Messpunkte liegen weniger als Δx entfernt vom Wert; 99.7% aller Werte weniger als 3 mal Δx

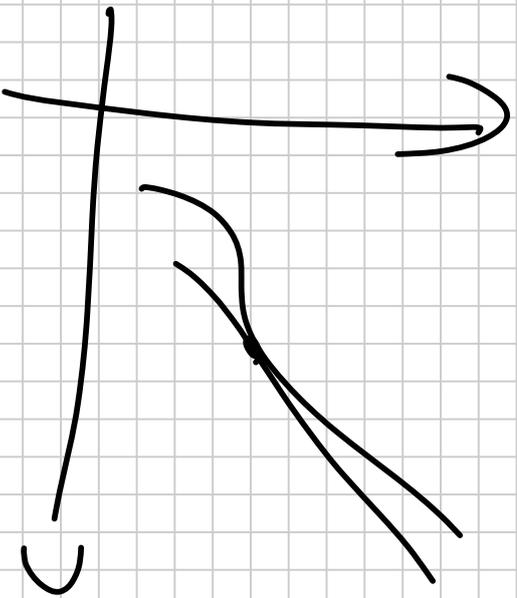
1.1.5 Messfehler

- **statistische** Messfehler (Fehler in der Messung)
statistische Verteilung (Geschwindigkeit von Gasmolekülen, Körpergröße, radioaktiver Zerfall)
- **systematische** Messfehler (Fehler der Messwerkzeuge)
Bsp: Zollstock bei Zimmertemperatur geeicht, Messung in Sahara und in Sibirien
Möglichkeiten: Fehler vermeiden, Ergebnis korrigieren, Fehler angeben
Problem: Fehler (teilweise) unbekannt

bei komplexen Messungen oft gute Annahme:

Messfehler ist statistisch verteilt und folgt der Gaußkurve

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$



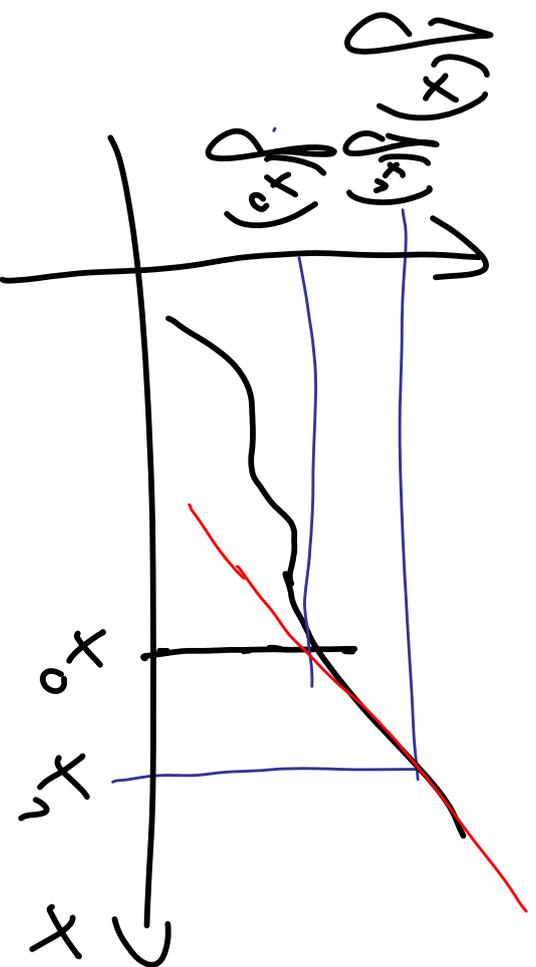
Tangente an $f(x)$ im \mathbb{R}^2

Gegeben: $f(x)$

Gesucht: $\frac{df(x)}{dx}$

Einschub: Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen ¹ (32)

Erinnerung: Ableitung (Differentiation) einer Funktion $f(x)$



Frage: Wie groß ist
die Steigung von
 $f(x)$ im Punkt x_0

$$\text{Steigung} = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{Längenunterschied}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Übergang: Durchschnittssteigung \rightarrow lokalen Steigung
(Ableitung)
 $\Delta x \rightarrow 0$

lim

$\Delta x \rightarrow 0$

Einschub: Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen ¹ (33)

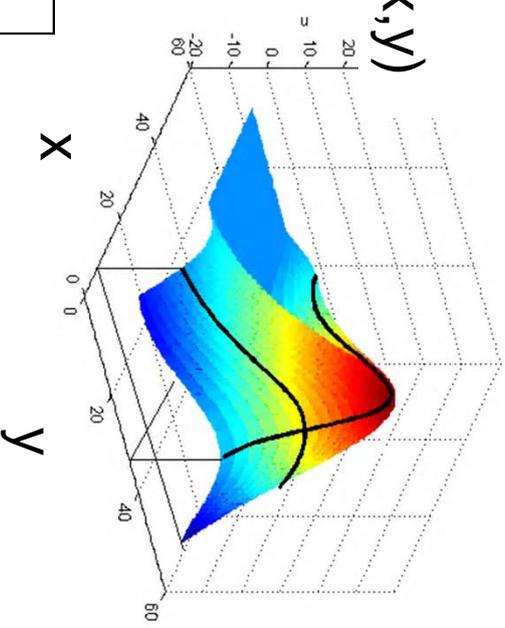
Bsp: $T(x, y, z)$ Temperatur hängt vom Ort ab: $T(x, y, z)$

partielle Ableitung Schreibweise: ∂ („rundes d“)

$\frac{\partial T(x, y)}{\partial x}$ Änderung der Temperatur mit x

$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y}$ Änderung der Temperatur mit y

$T(x, y)$



Rechnung: bei Ableitung nach x nimmt man y als konstant an

$$T(x, y) = 3xy + 2y^3 + 3x^2y^3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = 3y + 0 + 6xy^3$$

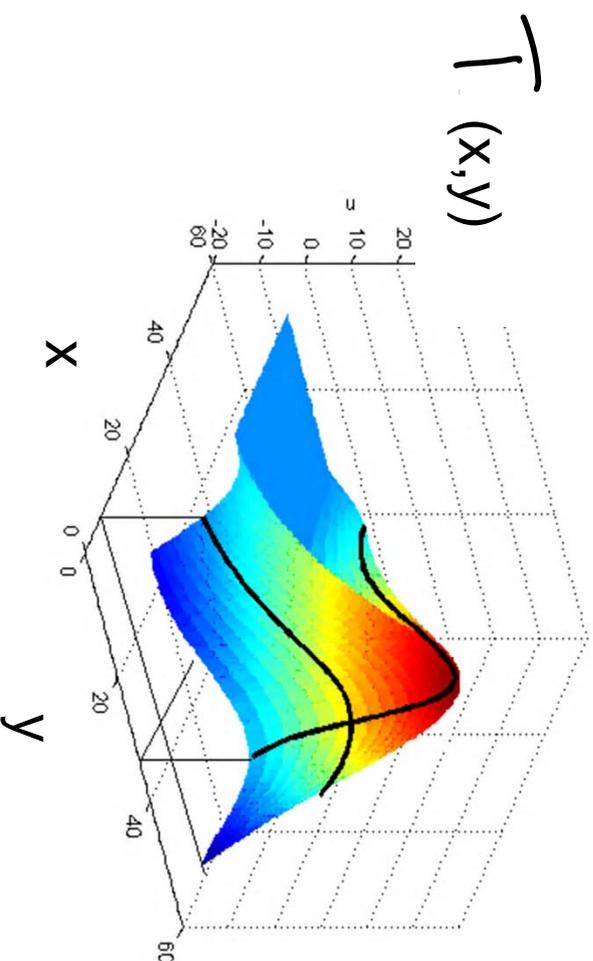
Gradient $grad(T(x, y)) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right)$

(zeigt in **Richtung der stärksten Änderung**)

Der Gradient ist ein Vektor. In 3D: $grad(T(x, y, z)) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$

1.1.5 Messfehler

Gauß'sche Fehlerfortpflanzung: $\Delta f_{\text{Gauß}}(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2}$
 (für unabhängige Einzelfehler)



Achtung

$$x = 111 \text{ m} \pm 3 \text{ m}$$

$$y = 30 \text{ m} \pm 4 \text{ m}$$

$$y_{\min}(x, y) = x_{\min} + y_{\min} = 108 \text{ m} + 86 \text{ m} = 194 \text{ m}$$

$$y_{\max}(x, y) = x_{\max} + y_{\max} = 114 \text{ m} + 94 \text{ m} = 208 \text{ m}$$

$$y(x, y) = 201 \text{ m} \pm 7 \text{ m}$$

Samps: $y(x, y) = (201 \pm 5) \text{ m}$

1.1.5 Messfehler

Gauß'sche Fehlerfortpflanzung:

(für unabhängige Einzelfehler)

$$\Delta f_{\text{Gauß}}(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2}$$

$$f(x, y) = x + y$$

$$x = 111 \text{ m}$$

$$\Delta x = 3 \text{ m}$$

$$y = 30 \text{ m}$$

$$\Delta y = 4 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y\right)^2} \\ &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} \\ &= \sqrt{9 \text{ m}^2 + 16 \text{ m}^2} = \sqrt{25 \text{ m}^2} = 5 \text{ m} \end{aligned}$$

$$f(x, y) = 201 \text{ m}$$

$$\Delta f(x, y) = 5 \text{ m}$$

$$f = (201 \pm 5) \text{ m}$$

1.1 Physikalische Größen und Einheiten

Zusammenfassung

Physikalische Größen bestehen aus Maßzahl und Einheit.

Normale der Messgrößen sind per Vereinbarung definiert (SI-Einheiten)

Umrechnung durch Kürzen der Einheiten

Jede Messung ist fehlerbehaftet (systematisch, statistisch)

Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f_{\text{Gauß}}(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2}$$

Messwerkzeuge sind unterschiedlich genau

$$f(x, y) = x \cdot y$$