2. Mechanik starrer Körper: 2.1 Kinematik

Kinematik: Beschreibung der Bewegung

Geschwindigkeit, Beschleunigung, freier Fall, Drehbewegung

Dynamik: Zusammenhang zw. Bewegung und Kraft

Wie muss der Skater springen, um das Brett wieder zu treffen ? (Ist das schwierig ?)

Wie weit kann man springen mit einer Absprunggeschwindigkeit von 10 m/s ?

2. Mechanik starrer Körper: 2.1 Kinematik

Kinematik: Beschreibung der Bewegung

Geschwindigkeit, Beschleunigung, freier Fall, Drehbewegung

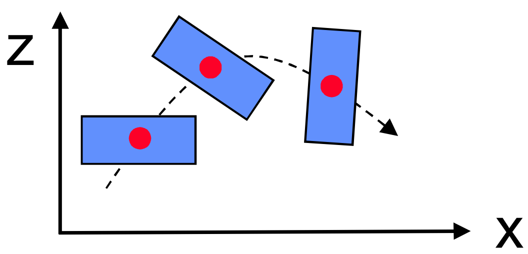
Dynamik: Zusammenhang zw. Bewegung und Kraft

Starrer Körper: alle Punkte haben unveränderliche Abstände, nicht deformierbar, keine Vibrationen

Reduktion auf **Massenpunkt**: Körper mit Ausdehnung null, aber endlicher Masse

Jede Bewegung eines starren Körpers kann als Überlagerung einer Bewegung (**Translation**) und einer Drehung (**Rotation**) aufgefasst werden.

Translation eines starren Körpers (bzw. seines Schwerpunktes) identisch mit Translation eines Massenpunktes.



Assume a spherical cow of uniform density…

A field of physics cows

Assume a spherical cow of uniform density…

„Mache die Dinge so einfach wie möglich - aber nicht einfacher. (Albert Einstein)

A field of physics cows

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i$$

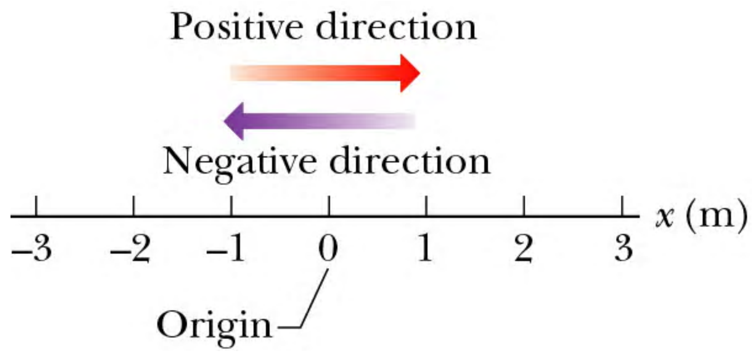
Messung Nr	X
1	5m
2	6m
3	4m

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{5m + 6m + 4m}{3} = \frac{15m}{3} = 5m$$

2.1.1 Kinematik in einer Dimension

Kinematik in einer Dimension:

Bewegung entlang einer geraden Linie



Geschwindigkeit v =

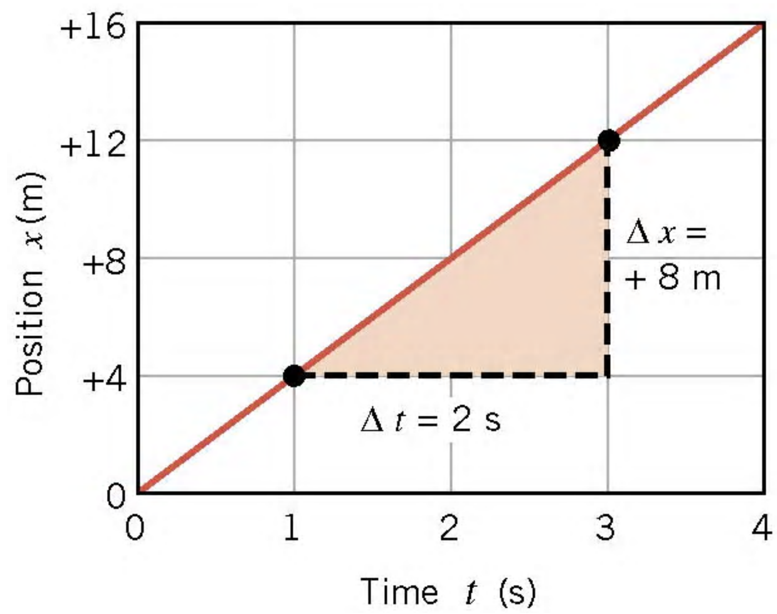
Steigung im Weg-Zeit-Diagramm

$$\boxed{v = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Hier:

gleichförmige Bewegung, v = const

Weg-Zeit-Diagramm:



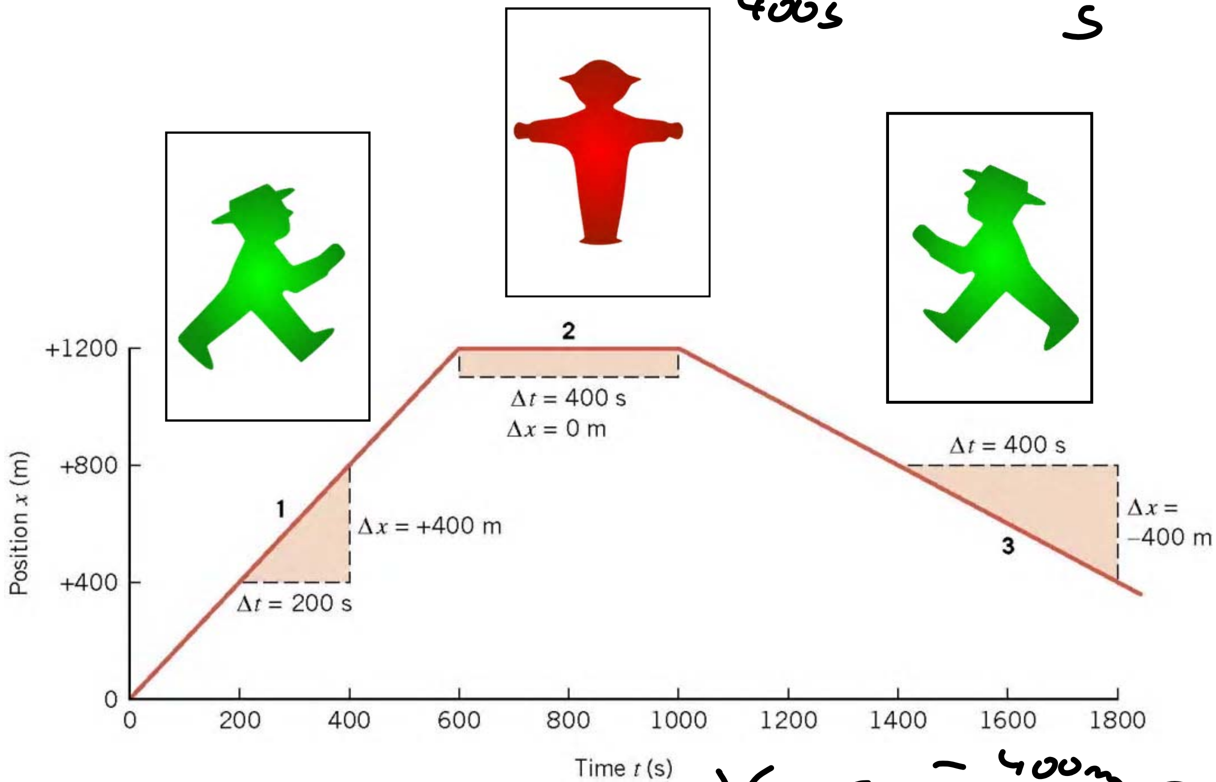
2.1.1 Kinematik in 1D: ungleichförmige Bewegung

Durchschnittsgeschwindigkeit
für Zeitintervall Δt:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_1 = \frac{400\,m}{200\,s} = 2\,\frac{m}{s}$$

$$v_2 = \frac{0\,m}{400\,s} = 0\,\frac{m}{s}$$

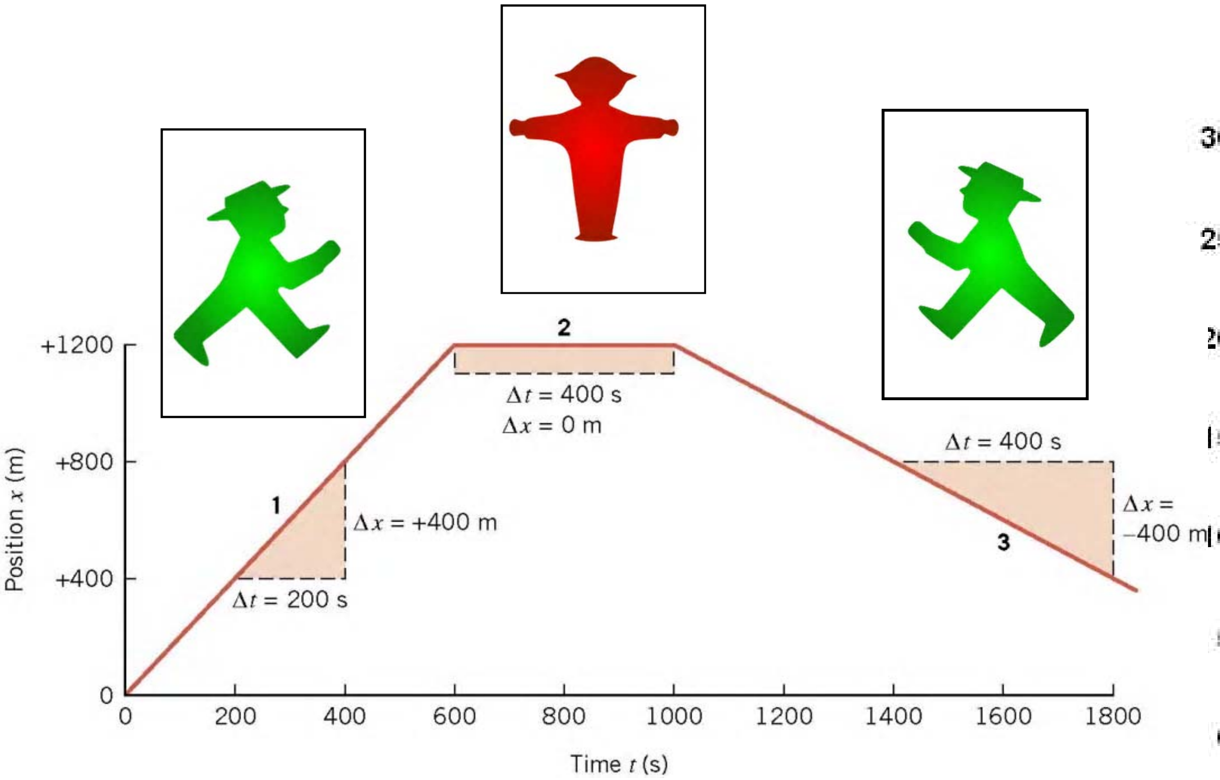


$$v_3 = \frac{-400\,m}{400\,s} = -1\,\frac{m}{s}$$

2.1.1 Kinematik in 1D: ungleichförmige Bewegung

Durchschnittsgeschwindigkeit
für Zeitintervall Δt:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

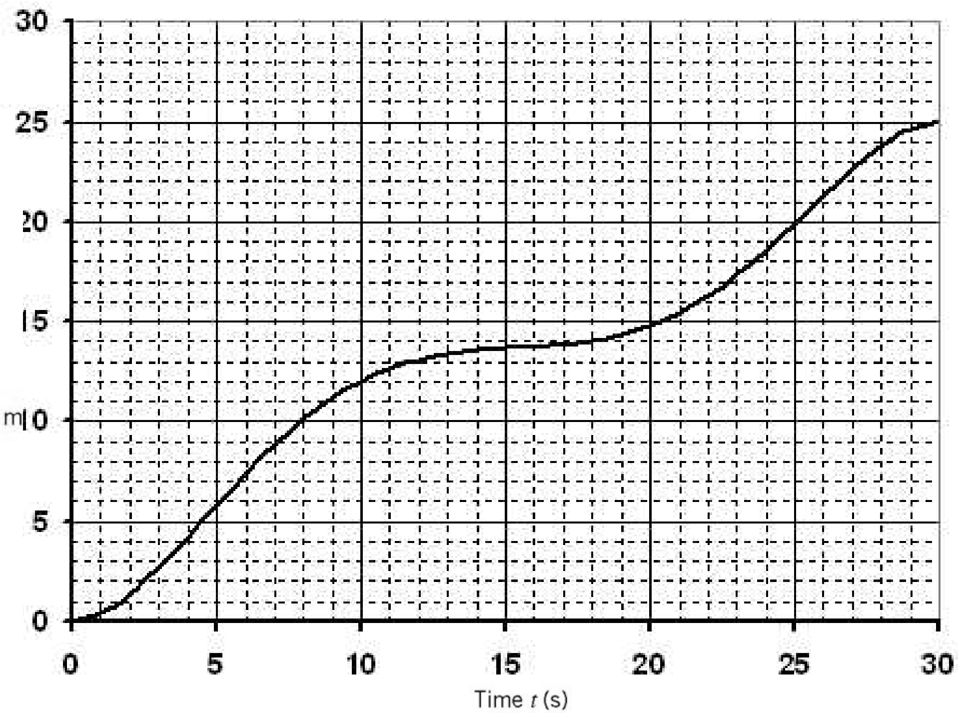


Momentangeschwindigkeit:

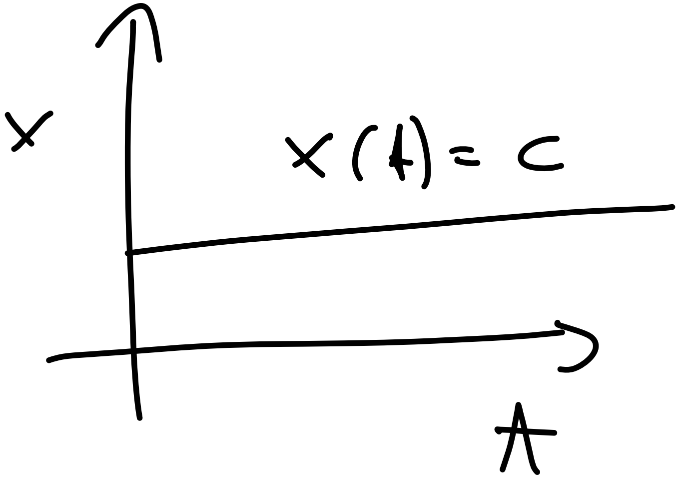
= Durchschnittsgeschwindigkeit für sehr kleines Zeitintervall Δt

= Ableitung der Weg-Zeit-Kurve

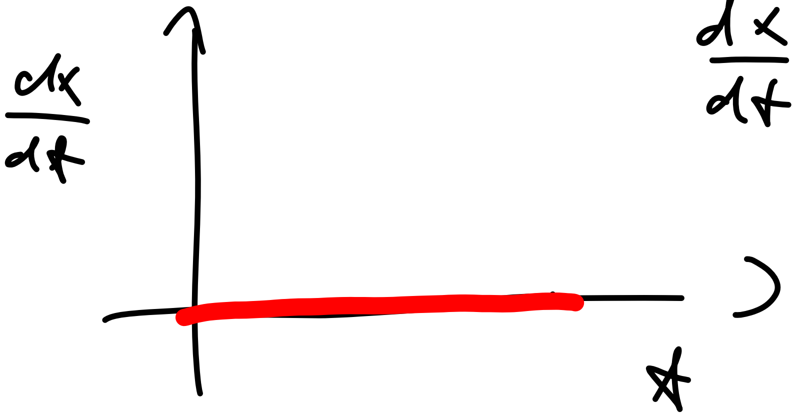
$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)}$$



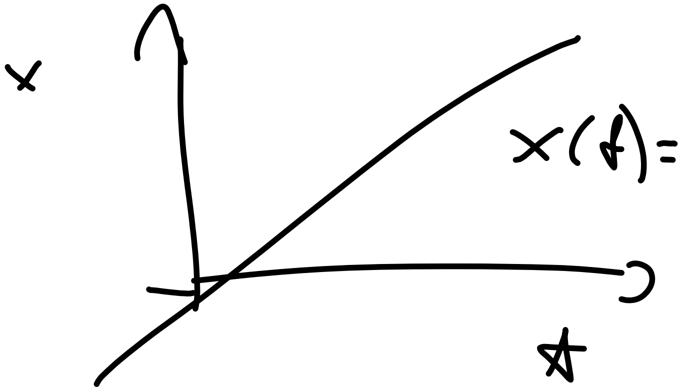
Differenzieren



$x(t) = c$

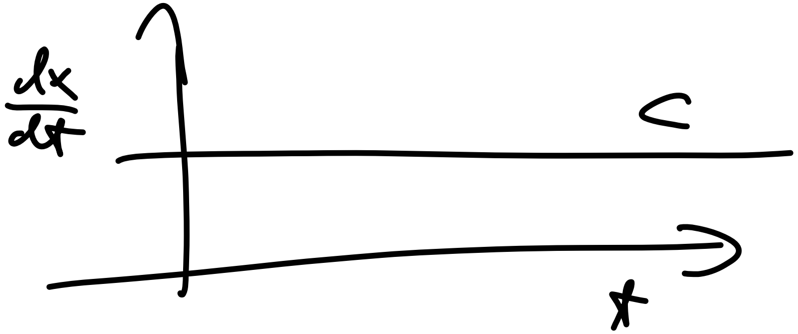


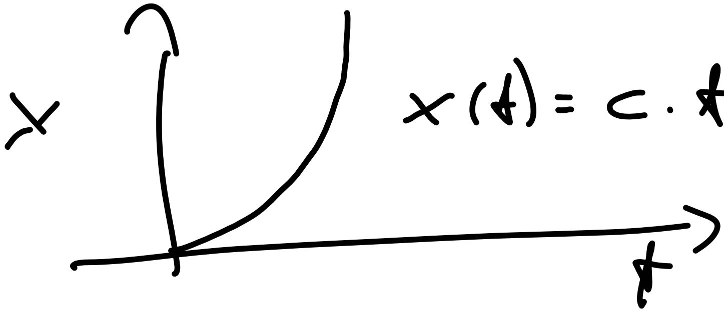
$\frac{dx}{dt} = 0$



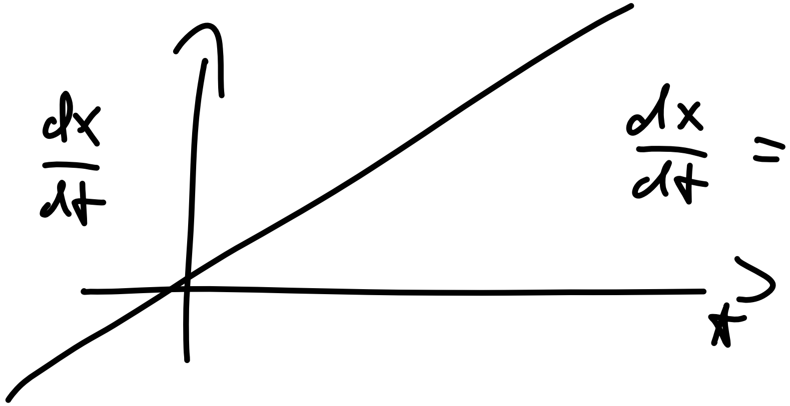
$x(t) = c \cdot t$

$\frac{dx}{dt} = c$





$x(t) = c \cdot t^2$



$\frac{dx}{dt} = 2ct$

2.1.1 Kinematik in 1D *Bsp.:* Bewegung eines Aufzugs

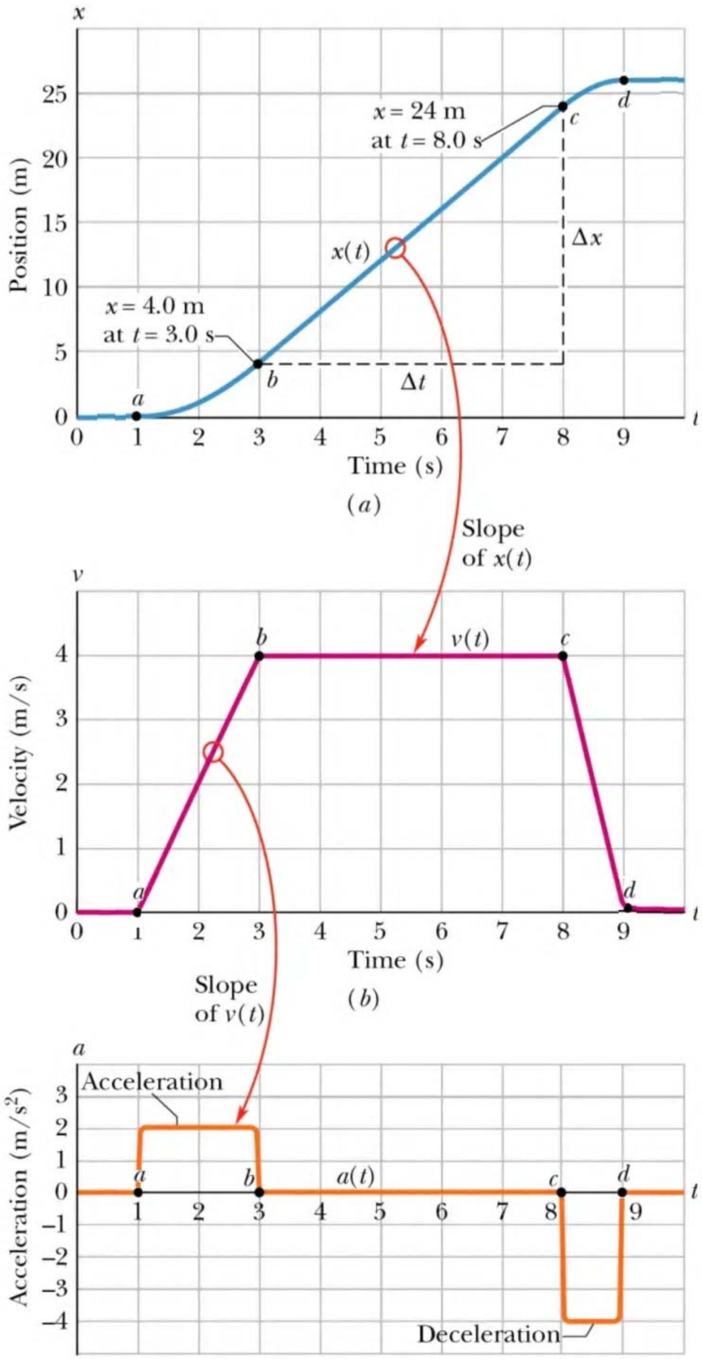


Diagramme:

Weg x als Funktion der Zeit $x = x(t)$ oder $s = s(t)$

Differenzieren ➔ Änderung des Ortes (Einheit 1m/s)

Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)}$$

Differenzieren ➔ Änderung der Geschwindigkeit (Einheit 1 m/s^2)

Beschleunigung a als Funktion der Zeit

$$\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t)}$$

2.1.1 Kinematik in 1D

Bisher:

Geschwindigkeit *v(t)* und Beschleunigung *a(t)* berechnet aus Weg *x(t)* durch differenzieren

$$\boxed{x(t)}$$

$\downarrow$ differenzieren

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt}}$$

$\downarrow$ differenzieren

$$\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt}}$$

Frage: Wie *x(t)* aus *v(t)* bzw. *a(t)* berechnen?

Antwort: durch integrieren!

$$v(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$$

$$x(t_1) = x(t_0) + \Delta x(\Delta t)$$

$$= x(t_0) + \Delta x_1(\Delta t_1) + \Delta x_2(\Delta t_2) + \ldots$$

$$= x(t_0) + \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i(\Delta t_i)$$

$$= x(t_0) + \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} x_i(\Delta t_i)$$

2.1.1 Kinematik in 1D

Bisher:
Geschwindigkeit *v(t)* und Beschleunigung *a(t)* berechnet aus Weg *x(t)* durch differenzieren

$$\boxed{x(t)}$$

differenzieren ↓

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt}}$$

differenzieren ↓

$$\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt}}$$

Frage: Wie *x(t)* aus *v(t)* bzw. *a(t)* berechnen?

Antwort: durch integrieren!

$$x(t_0) + \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i (t_i)$$

$$= x(t_0) + \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \Delta t_i$$

$$= x(t_0) + \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i$$

$$= x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt$$

2.1.1 Kinematik in 1D

Bisher:
Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ berechnet aus Weg $x(t)$ durch differenzieren

$$\boxed{x(t)}$$

differenzieren ↓

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt}}$$

differenzieren ↓

$$\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt}}$$

Frage: Wie $x(t)$ aus $v(t)$ bzw. $a(t)$ berechnen?

Antwort: durch integrieren!

$$\boxed{x(t) = \int v(t)dt}$$

integrieren ↑

$$\boxed{v(t) = \int a(t)dt}$$

integrieren ↑

$$\boxed{a(t)}$$

$$\boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)dt}$$

$$\boxed{v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)dt}$$

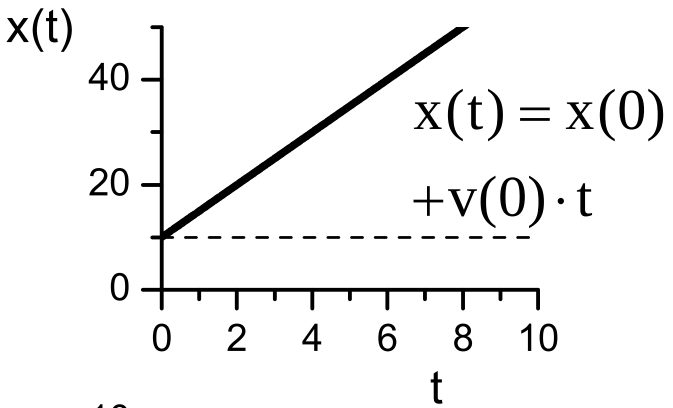
1) Differenzieren ist eindeutig

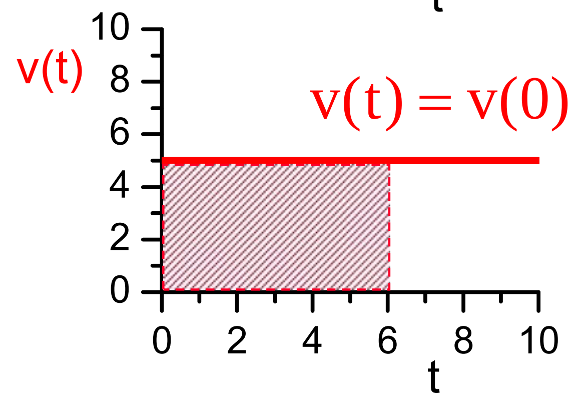
2) Integrationskonstanten gegeben durch Randbedingungen $x(t_0)$, $v(t_0)$

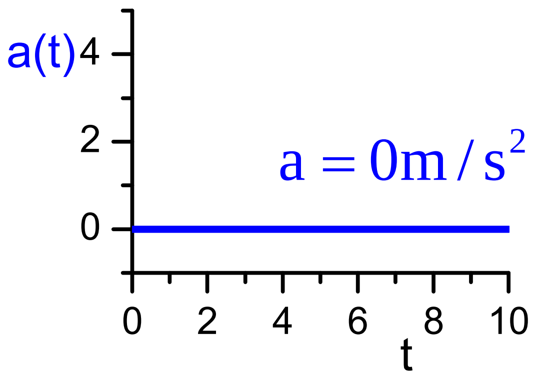
2.1.1 Kinematik in 1D

Bsp 1: **a(t) = const = 0**

(t_0=0, x(0)=10m, v(0)=5m/s)







keine Beschleunigung

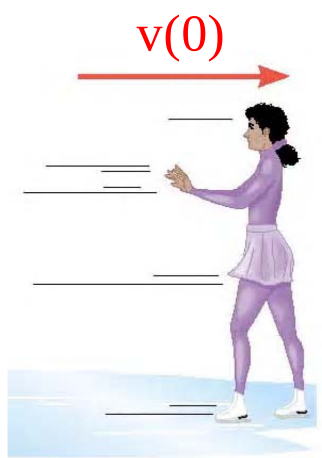
➔ gleichförmige Bewegung

$$x(t) = x(0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\cdot dt = x(0) + v(0)\cdot t \qquad \boxed{x(t) = \int v(t)dt}$$

$$v(t) = v(0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\cdot dt = v(0) \qquad \boxed{v(t) = \int a(t)dt}$$

$$a(t) = \text{const} = 0 \qquad \boxed{a(t)}$$

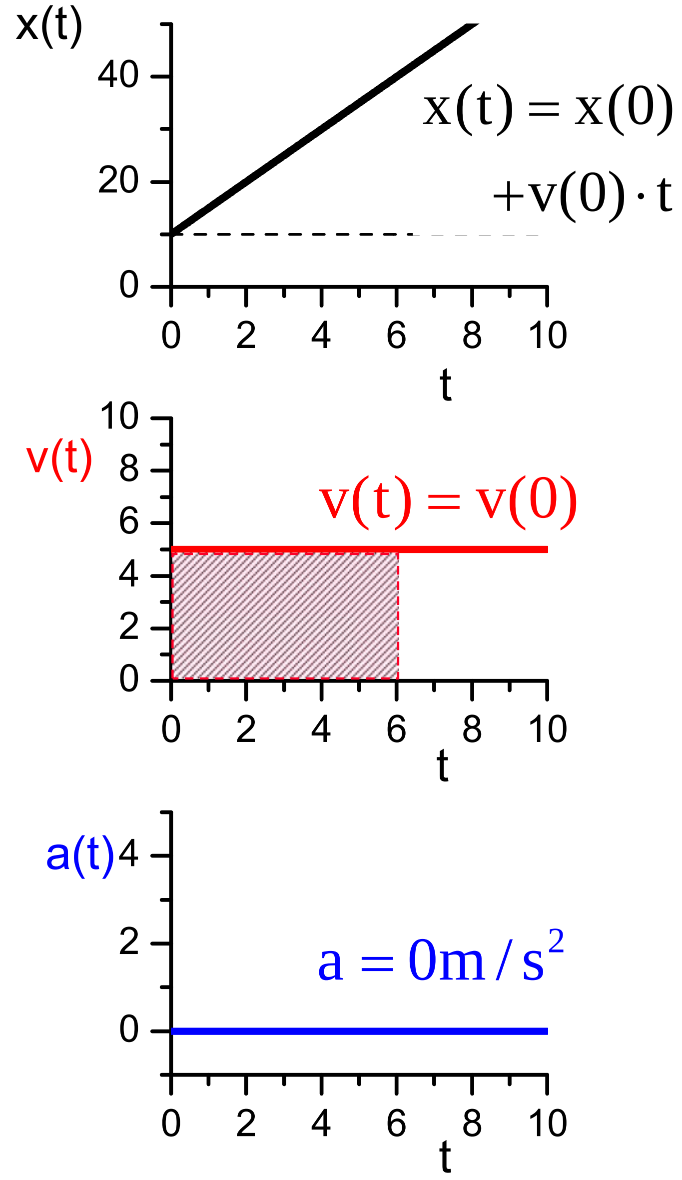
z.B. gleitende Eisläuferin



2.1.1 Kinematik in 1D

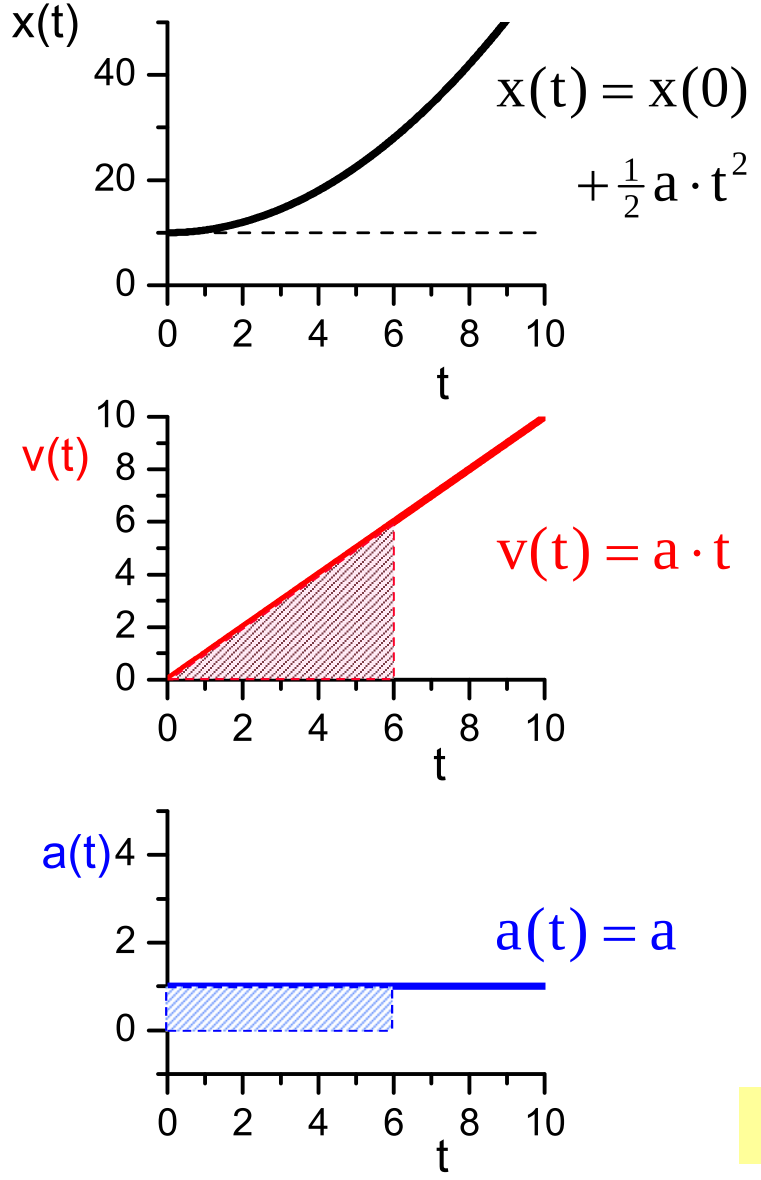
Bsp 1: **a(t) = const = 0**

(t_0=0, x(0)=10m, v(0)=5m/s)



Bsp 2: **a(t) = const = 1m/s²**

(x(0)=10m, v(0)=0m/s)



gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$x(t) = x(0) + \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt = x(0) + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$v(t) = v(0) + \int_{t_0}^{t} a(t) \cdot dt = v(0) + a \cdot t = a \cdot t$$

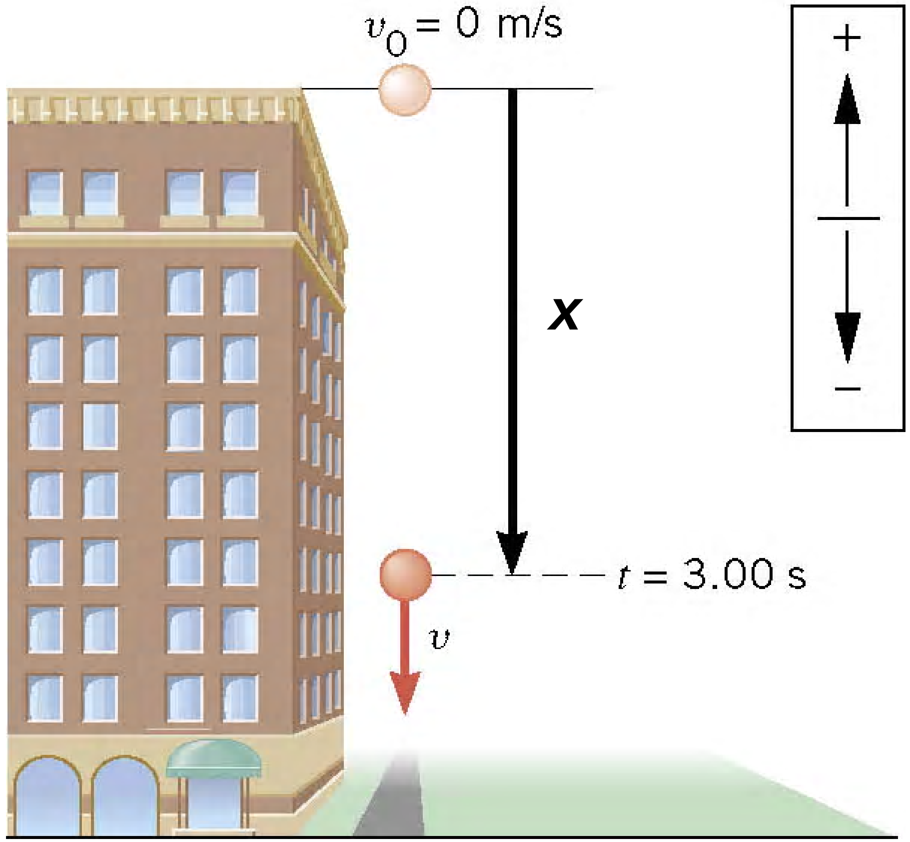
$$a(t) = \text{const} = a$$

Experiment mit Luftkissenbahn

2.1.1 Kinematik in 1D

Bsp: **freier Fall**

Weg-Zeit-Gesetz ?



$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{2x}{t^2}$$

1. Messung:

$$a_1 = \frac{2x_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 1\,m}{(0{,}45\,s)^2} = 9{,}9\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_2 = \frac{2x_2}{t_2^2} = \frac{2 \cdot 2\,m}{(0{,}64\,s)^2} = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$$

Experiment: freier Fall

2.1.1 Kinematik in 1D

Bsp: **freier Fall**

$$x(0) = v(0) = 0$$

$$a = \text{const.} = -g = -9.81\,\frac{m}{s^2}$$

der Wert von g variiert lokal (Breitengrad, Höhe, Gesteinsdichte)

$$\boxed{\Rightarrow x(t) = -\tfrac{1}{2} g \cdot t^2}$$

Der Ort x(t) hängt nur von der Zeit t ab,
nicht von der Masse, der Größe, der Form, etc.

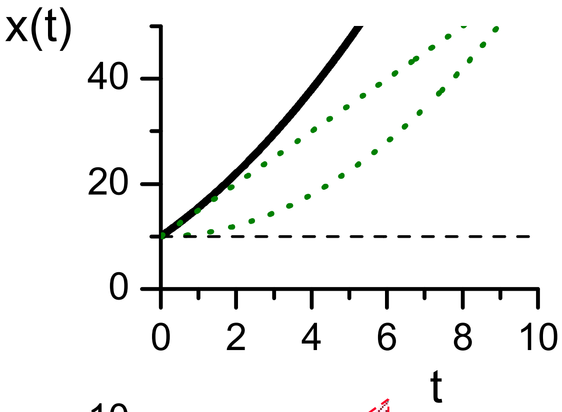
Problem mit der Alltagserfahrung ? Reibung an Luft !

Film „Apollo“ (Apollo 15, 1971)

2.1.1 Kinematik in 1D

Allgemein für a = const.

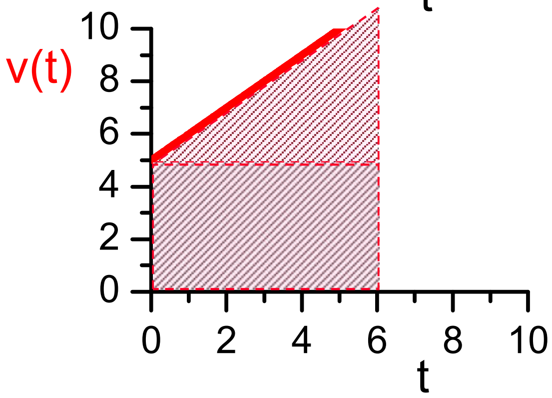
Bsp.: senkrechter Wurf



$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_{t_0}^{t} (v(0) + at)\,dt \\ &= x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}}$$

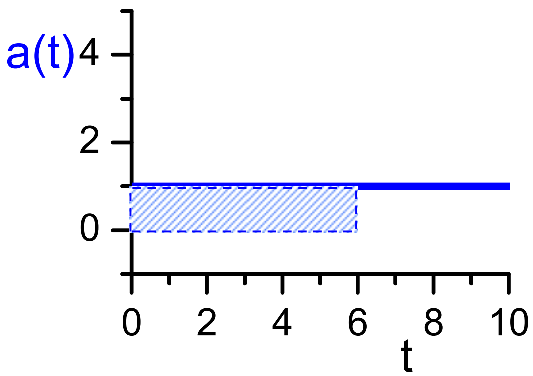
ungestörte Überlagerung von zwei Bewegungen:

gleichförmige Bewegung + gleichförmig beschleunigte Bewegung



$$\boxed{\mathrm{v(t) = v(0) + at}}$$

$$= \mathrm{v(0) + a \cdot t}$$

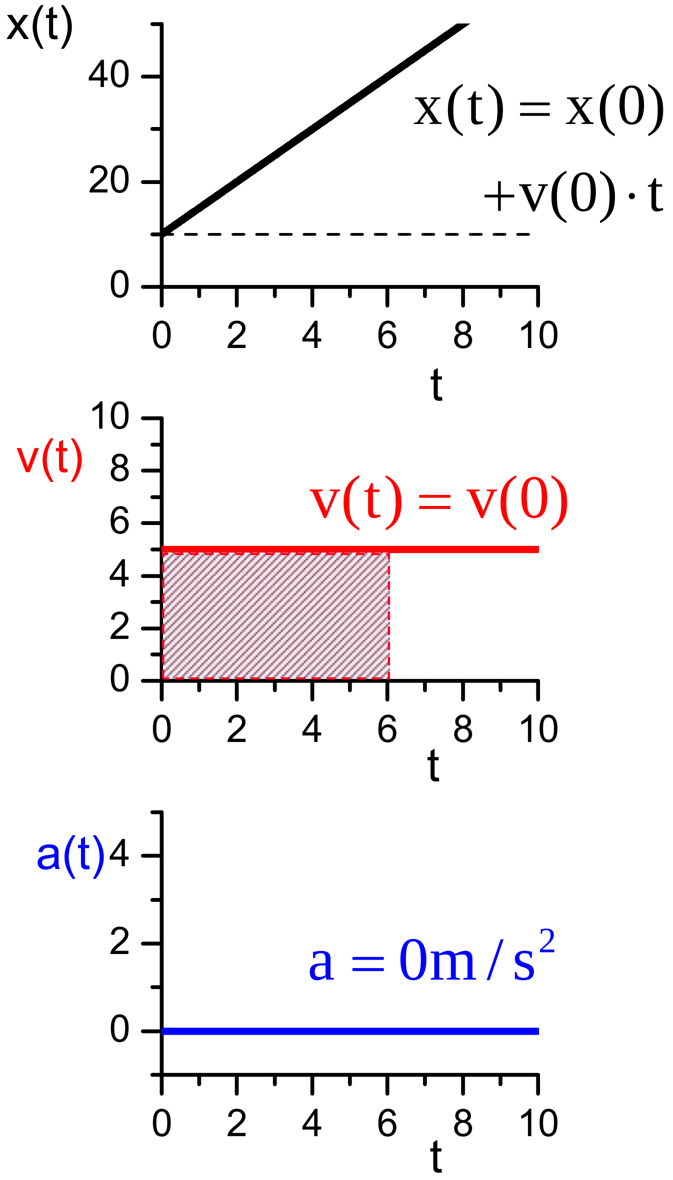


$$\mathrm{a(t) = const = a}$$

2.1.1 Kinematik in 1D: Überlagerung

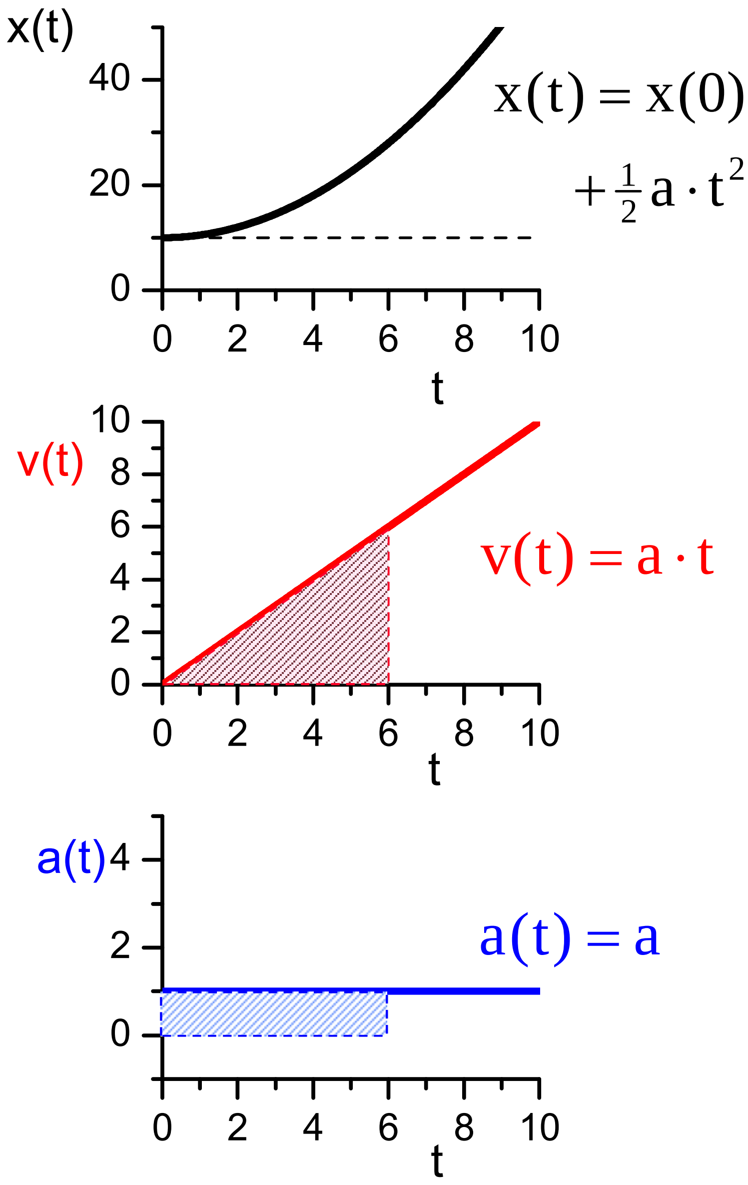
Bsp 1: **a(t)= const = 0**

(t_0=0, x(0)=10m, v(0)=5m/s)



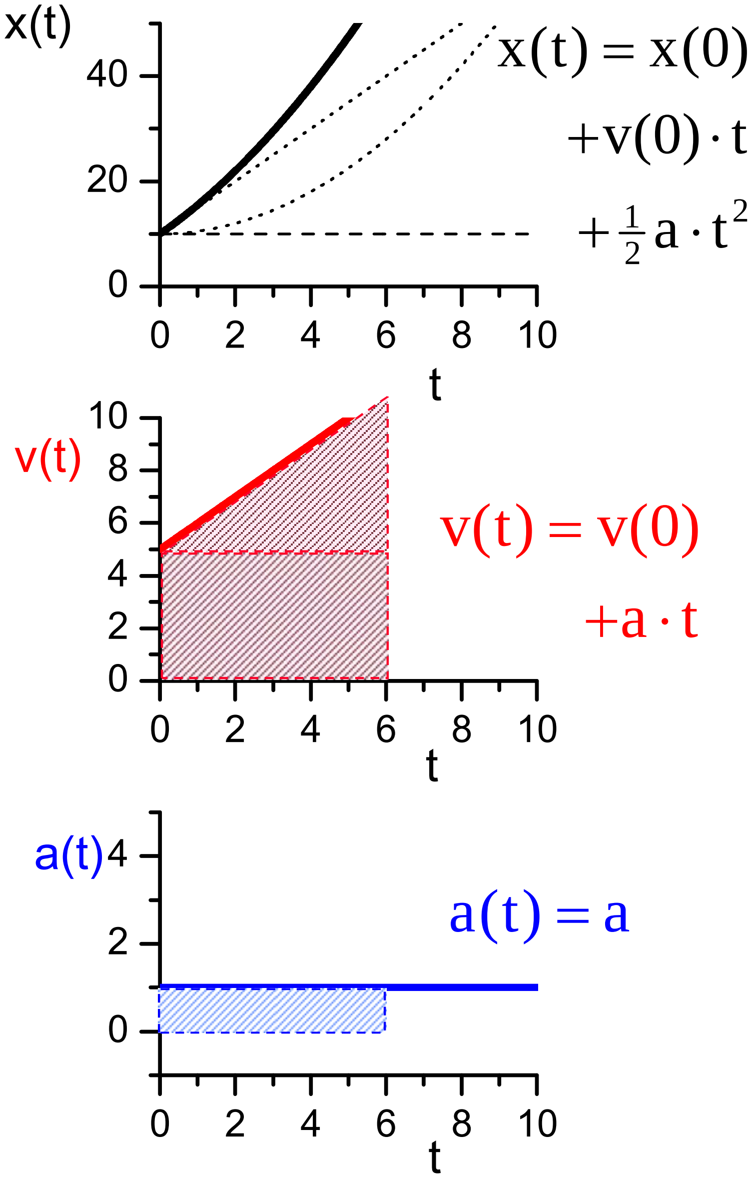
Bsp 2: **a(t) = const = 1m/s²**

(x(0)=10m, v(0)=0m/s)



Bsp 3: **a(t) = const = 1m/s²**

(x(0)=10m, v(0)=5m/s)



2.1.1 Kinematik in 1D

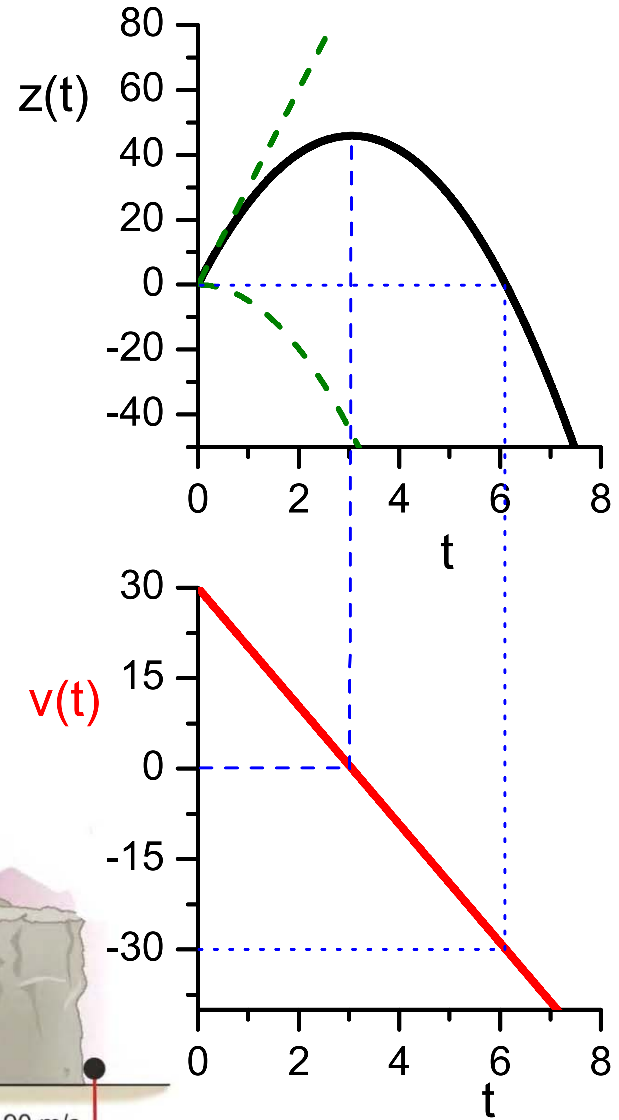
Bsp: **senkrechter Wurf** (freier Fall mit $v(0) = v_0 \neq 0$ m/s)

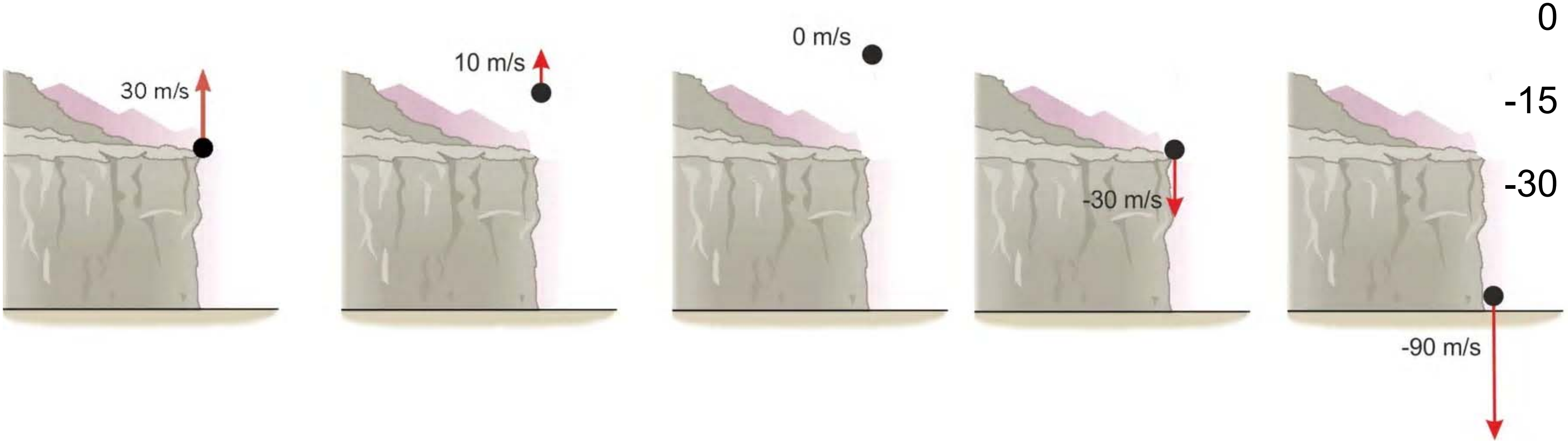
$$\boxed{z(t) = z(0) + v(0) \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2}$$

a = -g = -9.81 m/s²

$$\boxed{z(t) = z_0 + v_0 \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2}$$

ungestörte Überlagerung
von zwei Bewegungen !





2.1.1 Kinematik in 1D

Aufgabe: Sie lassen einen Stein in den Brunnen fallen.
Er schlägt nach t=3s auf.
Wie tief ist der Brunnen?

$$\boxed{z(t) = z_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2}$$

$$z_0 = 0\,m \; ; \; v_0 = 0\,\mathrm{m/s} \; ; \; g \approx -10\,\mathrm{m/s^2}$$

$$z(t = 3s) = z_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$= 0 + 0 \cdot 3s - \frac{1}{2} 10 \frac{m}{s^2} \cdot (3s)^2$$

$$= -5 \frac{m}{s^2} \cdot 9 s^2 = -45\,m$$

2.1.1 Kinematik in 1D

Aufgabe: **Wie lange braucht der Stein, um nach dem Loslassen 5 m zu fallen ?**

$$\boxed{z(t) = z_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2}$$

$$z_0 = 0\,m \; ; \quad v_0 = 0\,m/s \; ; \quad a = -g \approx 10\,m/s^2$$

$$z(t) = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \overset{!}{=} -5\,m$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\, 10\, m/s^2\, t^2 = -5\,m$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{2 \cdot 5}{10} \frac{m\, s^2}{m} = 1\,s^2$$

$$\Rightarrow \quad t = 1\,s$$

2.1.1 Kinematik in 1D

Zusammenfassung

Bewegung eines Massenpunktes wird durch **Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$** beschrieben.

x, v und a sind durch **Differentiation eindeutig** und durch **Integration nicht eindeutig** (Integrationskonstanten!) miteinander verknüpft. Integrationskonstanten sind durch Anfangsbedingungen $x(t=0)$ und $v(t=0)$ gegeben.

Für **a=const.** : $\boxed{v(t) = v(0) + at}$ $\boxed{x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2}$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Bewegung in 2 Dimension

➔ **ungestörte Überlagerung von Bewegungen !** (Superposition)

➔ **unabhängige Behandlung jeder Richtungskomponente**

Experiment: Fallende Kugeln

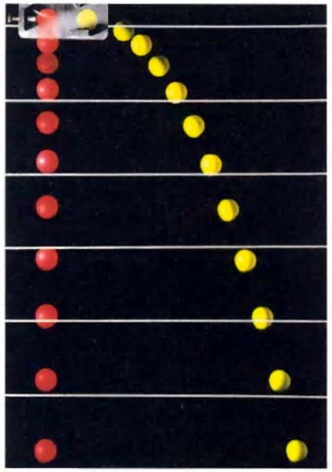
2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Bewegung in 2 Dimension

➔ **ungestörte Überlagerung von Bewegungen !** (Superposition)

➔ **unabhängige Behandlung jeder Richtungskomponente**

Bsp. 1:
fallende Kugeln



1) Horizontale: gleichförm. Bewegung

$$\boxed{v_x = v_{x,0} = \text{const}}$$

$$\boxed{x(t) = v_x \cdot t}$$

$$v_{x1} = 0 \quad , \quad v_{x2} > 0$$

2) Vertikale: „senkrechter Wurf“

$$\boxed{z(t) = z_0 + v_{z,0} \cdot t + \tfrac{1}{2} a_z \cdot t^2}$$

$$a_z = -g$$

$$v_{z1} = v_{z2} = v_{z,0} - gt$$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Bewegung in 2 Dimension

➔ **ungestörte Überlagerung von Bewegungen !** (Superposition)

➔ **unabhängige Behandlung jeder Richtungskomponente**

Experiment: Zug mit Kanone

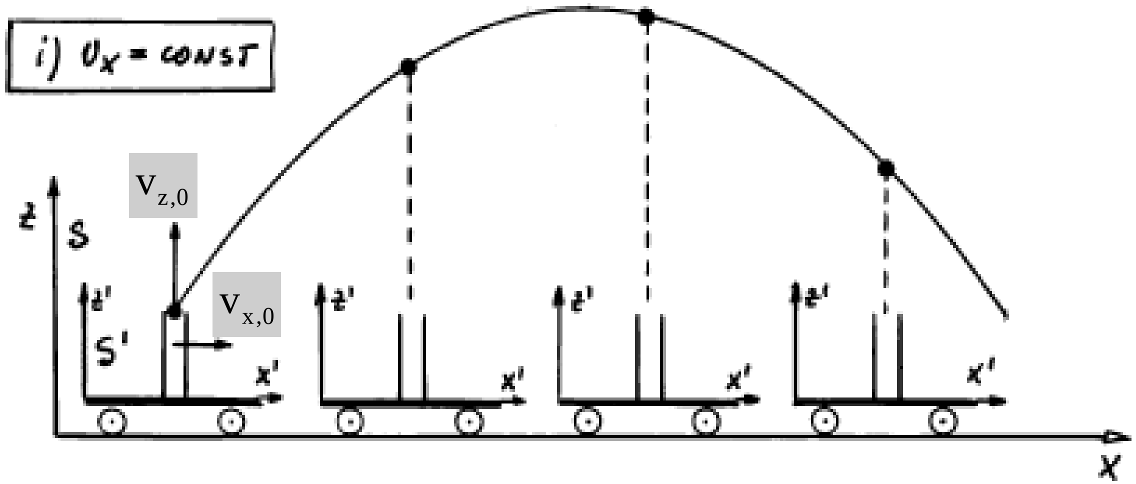
2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Bewegung in 2 Dimension

➔ **ungestörte Überlagerung von Bewegungen !** (Superposition)

➔ **unabhängige Behandlung jeder Richtungskomponente**

Bsp. 2: schräger Wurf (Hochwerfen einer Kugel im gleichmäßig fahrenden Zug)



1) Horizontale: gleichförm. Bewegung

$$v_{x,Zug}(t) = v_{x,Kugel}(t) = \text{const} = v_x \quad \Rightarrow x(t) = v_x \cdot t \ \text{ für alle } t \Rightarrow x_{Zug}(t) = x_{Kugel}(t)$$

2) Vertikale: senkrechter Wurf $\boxed{z(t) = z_0 + v_{z,0} \cdot t + \tfrac{1}{2} a_z \cdot t^2}$ $a_z = -g$

$$v_{z,Zug} = 0 \quad , \quad v_{z,Kugel} = v_{z,0} - gt$$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Bewegung in 2 Dimension

➔ **ungestörte Überlagerung von Bewegungen !** (Superposition)

➔ **unabhängige Behandlung jeder Richtungskomponente**

Skater-Problem

der Skater muss **senkrecht** hochspringen, um nach dem Sprung das Brett wieder zu treffen. („geht doch ganz einfach!“)

Vernachlässigt: Reibung (Skateboard-Rollen), Luftwiderstand

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 D: Skalare & Vektoren

Skalare Größen: ausschließlich durch Zahlenwert & Einheit definiert.

Bsp.: Volumen, Masse, Temperatur

Vektorielle Größen *(Notation:* $\underline{v}$, $\mathbf{v}$ oder $\vec{v}$):

sind durch **Betrag** (Zahlenwert & Einheit; $|\underline{v}|$)

und durch eine **Richtung** im Raum ($\underline{e}$) bestimmt

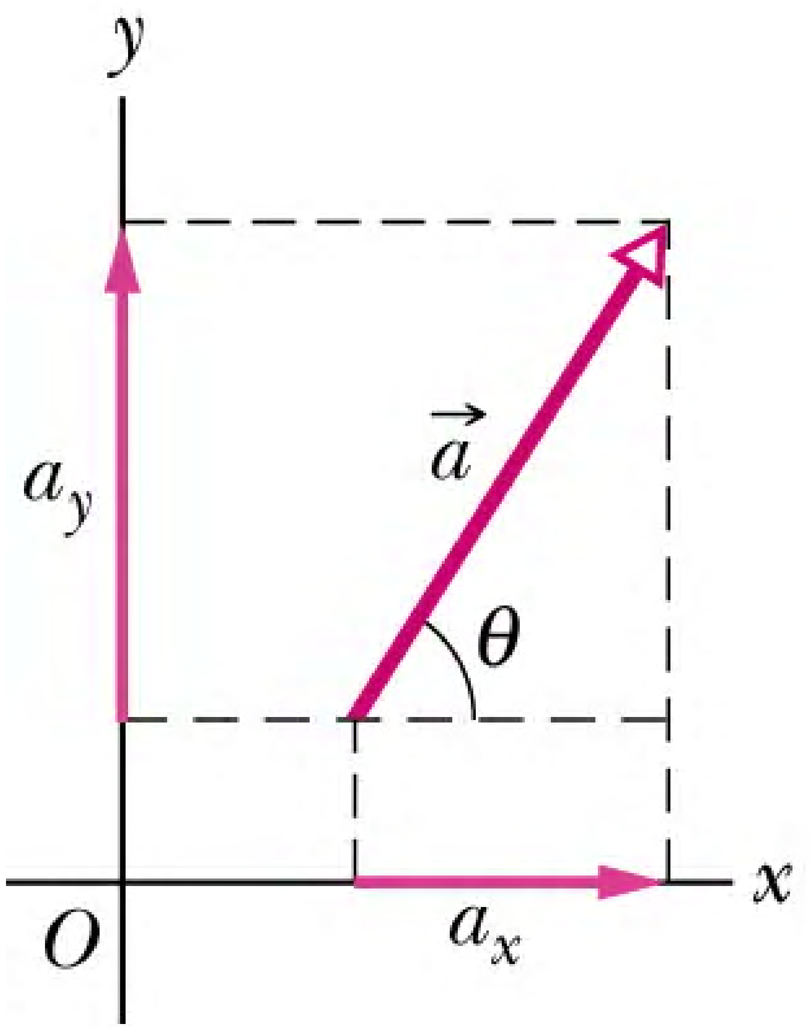
Bsp.: Ortsvektor $\underline{r}$, Geschwindigkeit $\underline{v}$, Kraft $\underline{F}$

$\underline{v} = |\underline{v}|\ \underline{e}$ mit Einheitsvektor $\underline{e}$ ($|\underline{e}|=1$) parallel zu $\underline{v}$: $\underline{e} \parallel \underline{v}$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 D: Skalare & Vektoren

Bsp.:

in **2 Dimensionen**



Schreibweisen:

Komponenten-darstellung

$\underline{a} = a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y = (a_x, a_y)$

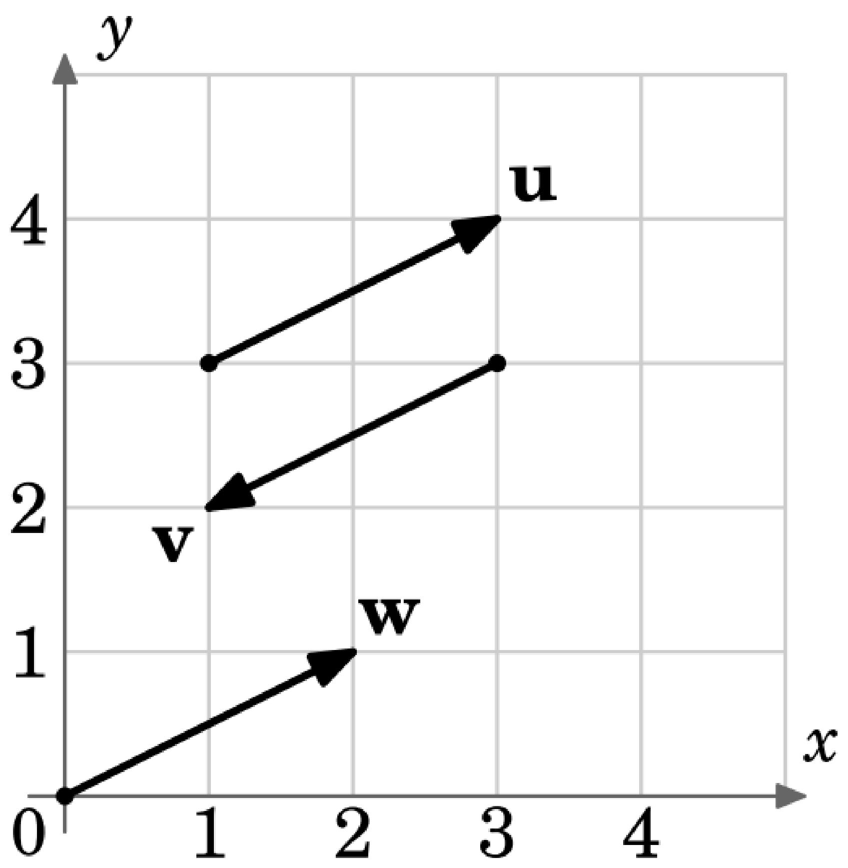
$a_x = |\underline{a}| \cos(\theta)$, $a_y = |\underline{a}| \sin(\theta)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 D: Vektoren

Vektoren mit gleichem Betrag und gleicher Richtung sind identisch



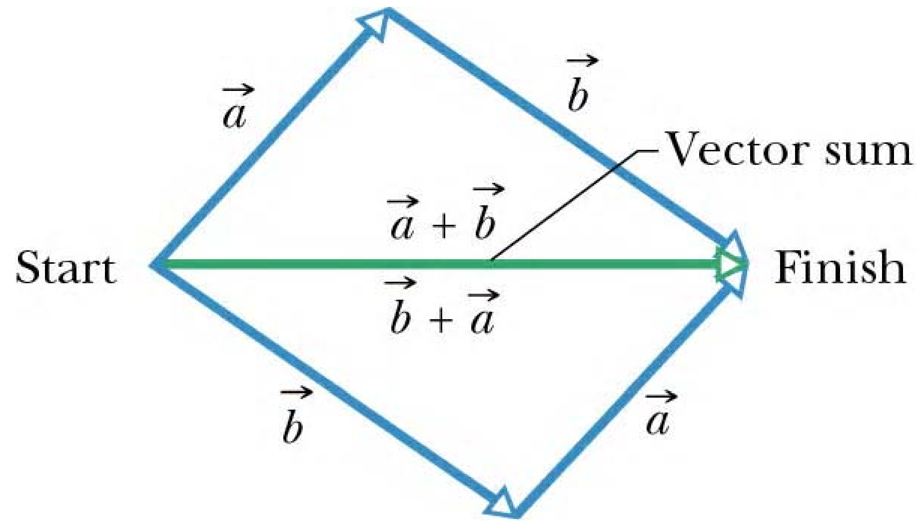
$\underline{u} \neq \underline{v}$

$\underline{u} = \underline{w}$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 D: Vektoren

Addition von Vektoren:

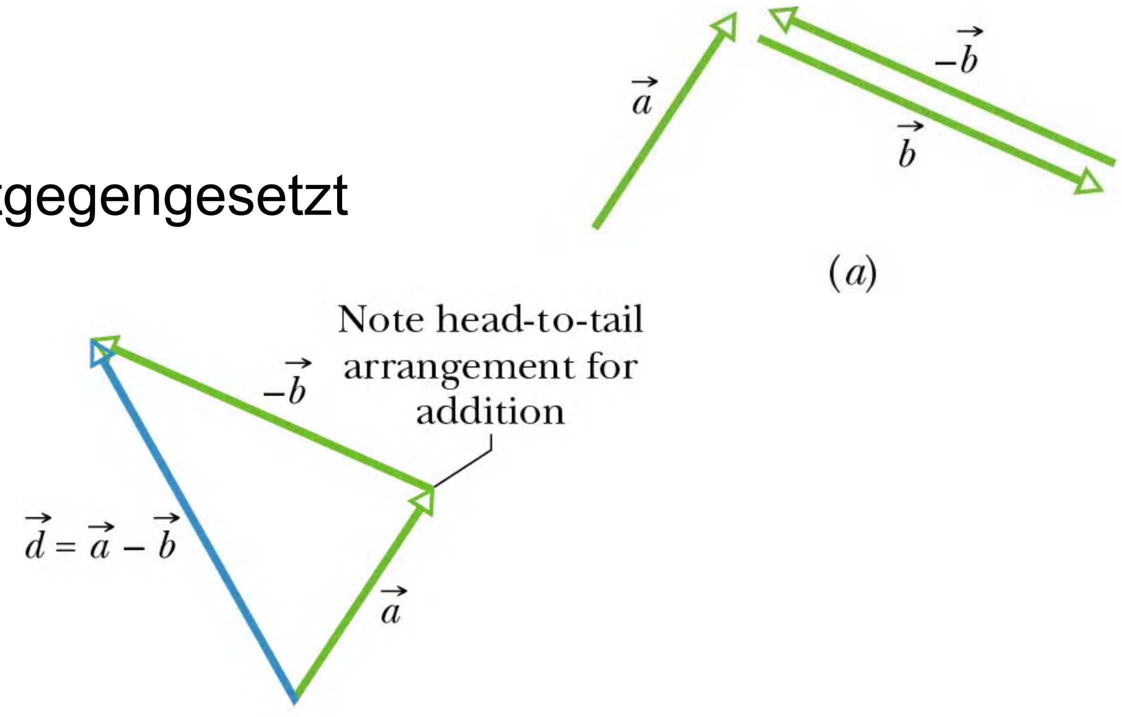
$\underline{a} + \underline{b}$: Startpunkt von $\underline{b}$ an Endpunkt von $\underline{a}$



$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a} = (a_x+b_x,\ a_y+b_y)$ (in 2D)

-b ist b genau entgegengesetzt

$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$



(a)

(b)

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 D: Vektoren

3) Vektoren multiplizieren

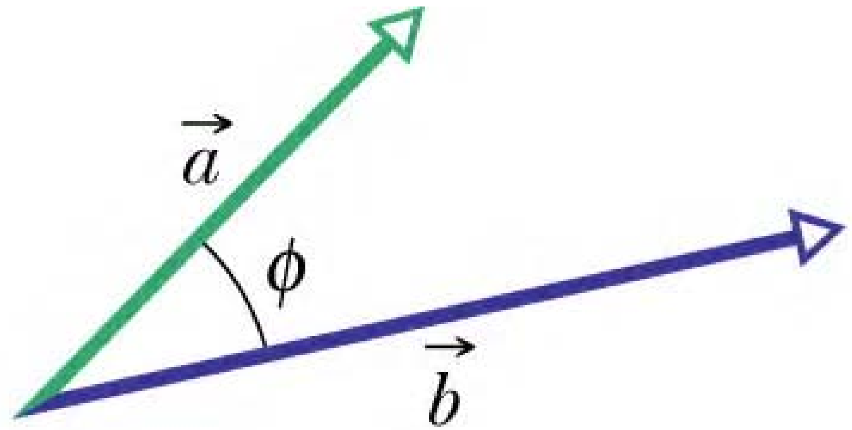
Skalarprodukt (inneres Produkt)

$$\boxed{\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos\phi}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$\cos\phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Ergebnis ist ein Skalar



(a)

$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ für $\underline{a} \perp \underline{b}$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 D: Vektoren

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

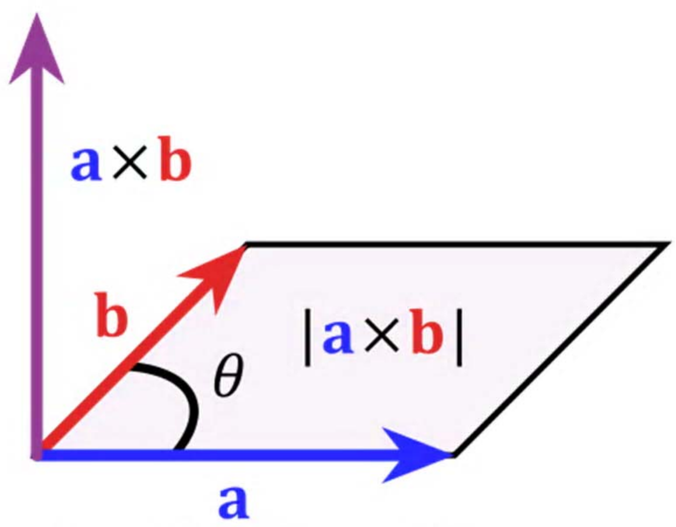
Ergebnis ist ein Vektor

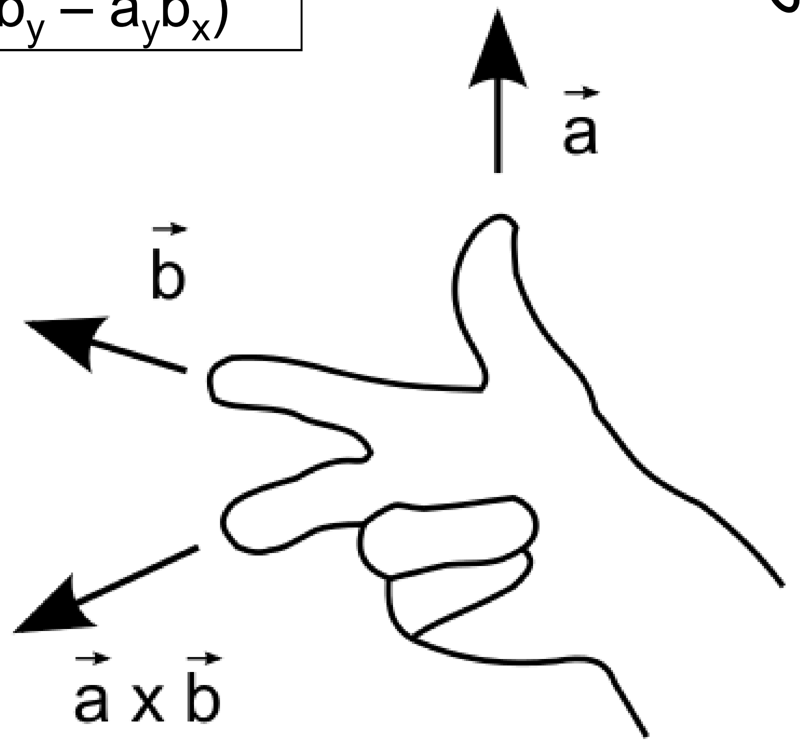
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - b_x a_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a}) = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)}$$

$$\boxed{\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})} \qquad \boxed{|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}|\ |\underline{b}| \sin \phi}$$

$\underline{a} \times \underline{b} = 0$ für $\underline{a} \parallel \underline{b}$ $\qquad$ $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}, \underline{b}$





Rechte-Hand-Regel

Richtung: senkrecht auf $\underline{a}$ und $\underline{b}$

Länge: entspricht Fläche des Parallelogramms aus $\underline{a}$, $\underline{b}$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 D: Vektoren

Differenzieren von Vektoren

1D $$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

3D $$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 D: Vektoren

Integrieren von Vektoren

1D $\quad v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,dt$

3D $\quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)\,dt$

$$= \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \left(a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \right) dt$$

$$= \vec{v}_0 + \vec{e}_x \int_{t_0}^{t_1} a_x\,dt + \vec{e}_y \int_{t_0}^{t_1} a_y\,dt + \vec{e}_z \int_{t_0}^{t_1} a_z\,dt$$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Bewegung in 2 Dimensionen: schräger Wurf

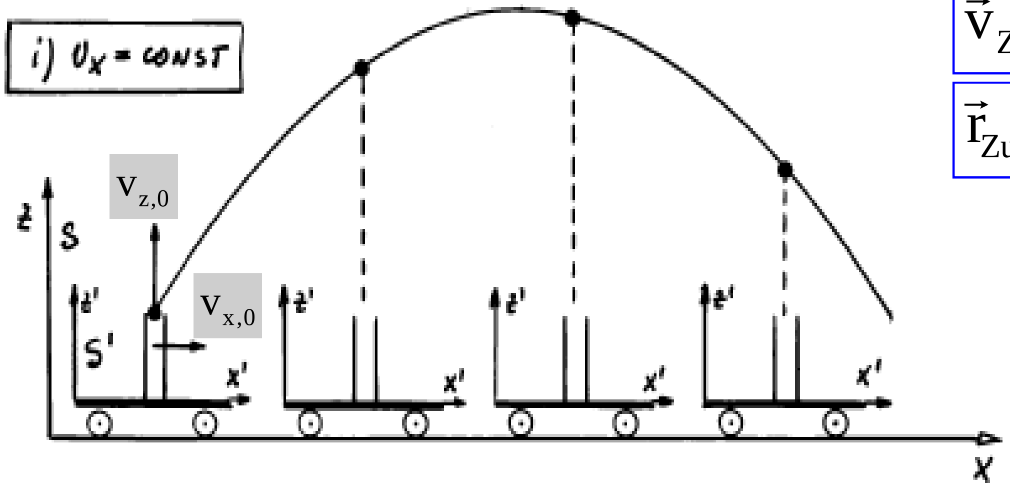
Bsp.: Hochwerfen eines Apfels im gleichmäßig fahrenden Zug

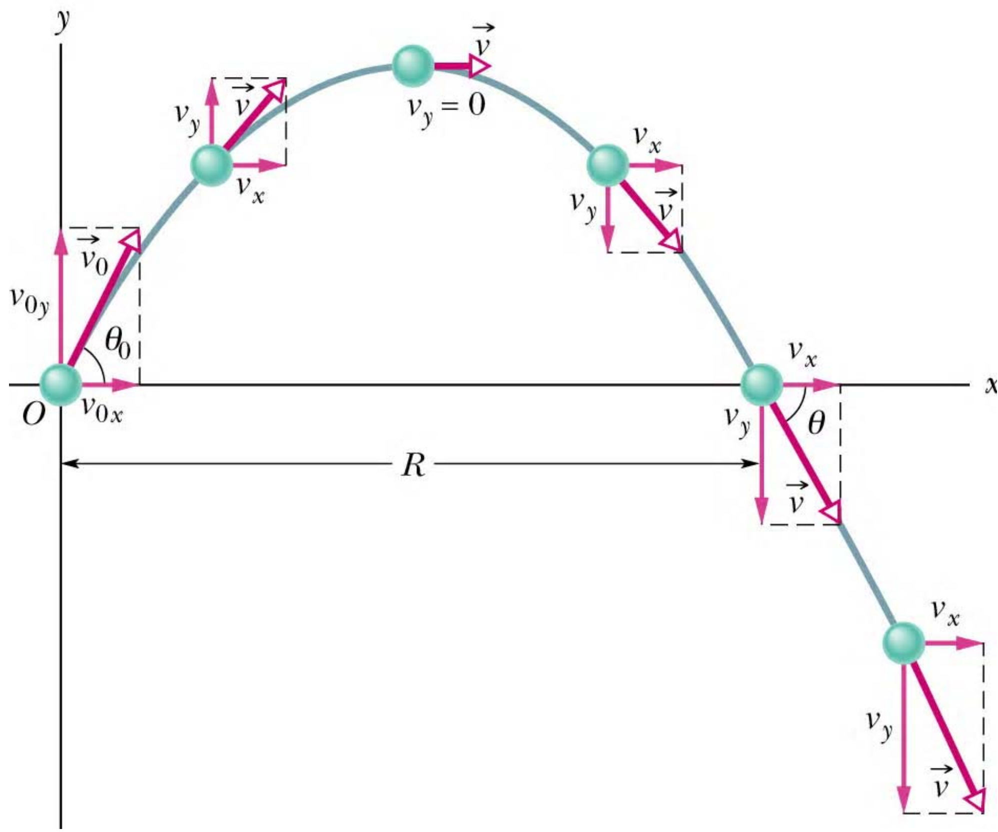
$$\vec{v}_{Zug} = (v_{x,0}, 0, 0)$$

$$\vec{r}_{Zug} = (v_{x,0} \cdot t, 0, 0)$$

$$\vec{v}_{Apfel} = (v_{x,0}, 0, v_{z,0} - gt)$$

$$\vec{r}_{Apfel} = (v_{x,0} t, 0, v_{z,0} t - \tfrac{1}{2} g t^2)$$

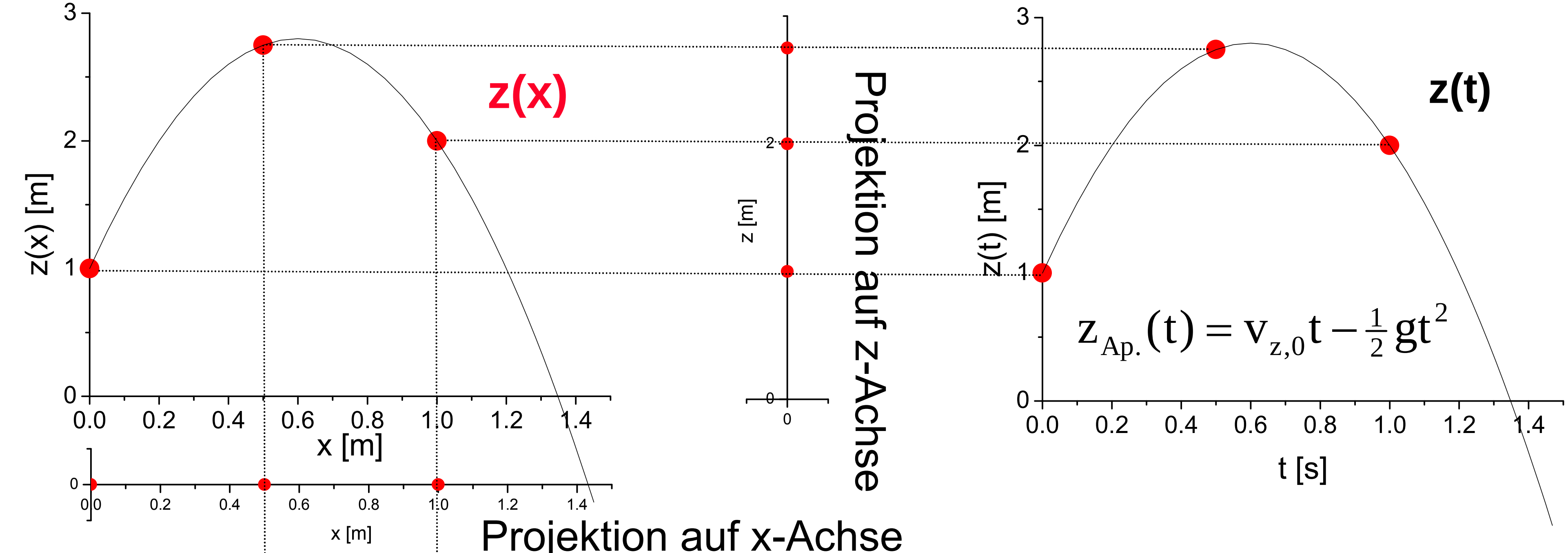


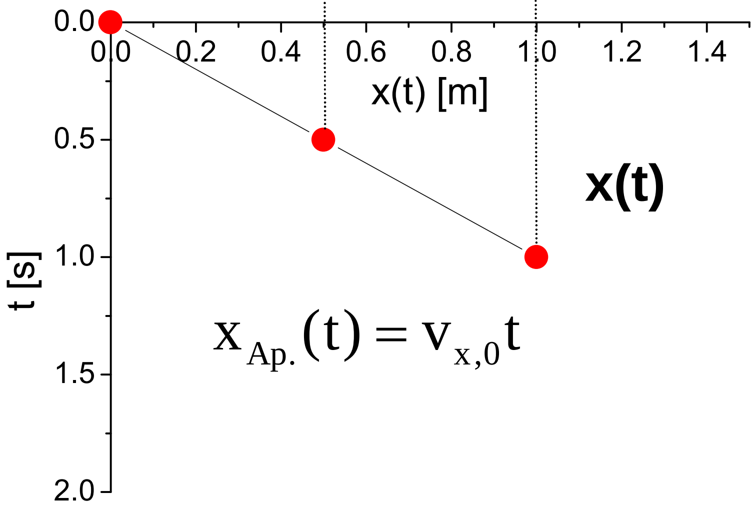


- **Geschwindigkeiten werden vektoriell addiert**
- **resultierende Gesamtgeschwindigkeit ist tangential zu Trajektorie**
- **<u>v</u> im Allgemeinen nicht parallel <u>a</u>**

Bsp.: Schräger Wurf

gegeben: **$z_0 = 1$ m, $v_{z,0} = 6$ m/s, $x_0 = 0$ m, $v_{x,0} = 1$ m/s** (oder: $|v_0|$=6.083m/s, α=80.54°)





Trajektorie z(x): eliminiere t: $t(x) = \frac{x_{Apfel}}{v_{x,0}}$

$$z_{Ap.}(t) = v_{z,0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = v_{z,0}\frac{x_{Ap.}}{v_{x,0}} - \tfrac{1}{2}g\frac{x_{Ap.}^2}{v_{x,0}^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow z_{Ap.}(x) = \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}}x_{Ap.} - \frac{g}{2v_{x,0}^2}x_{Ap.}{}^2}$$

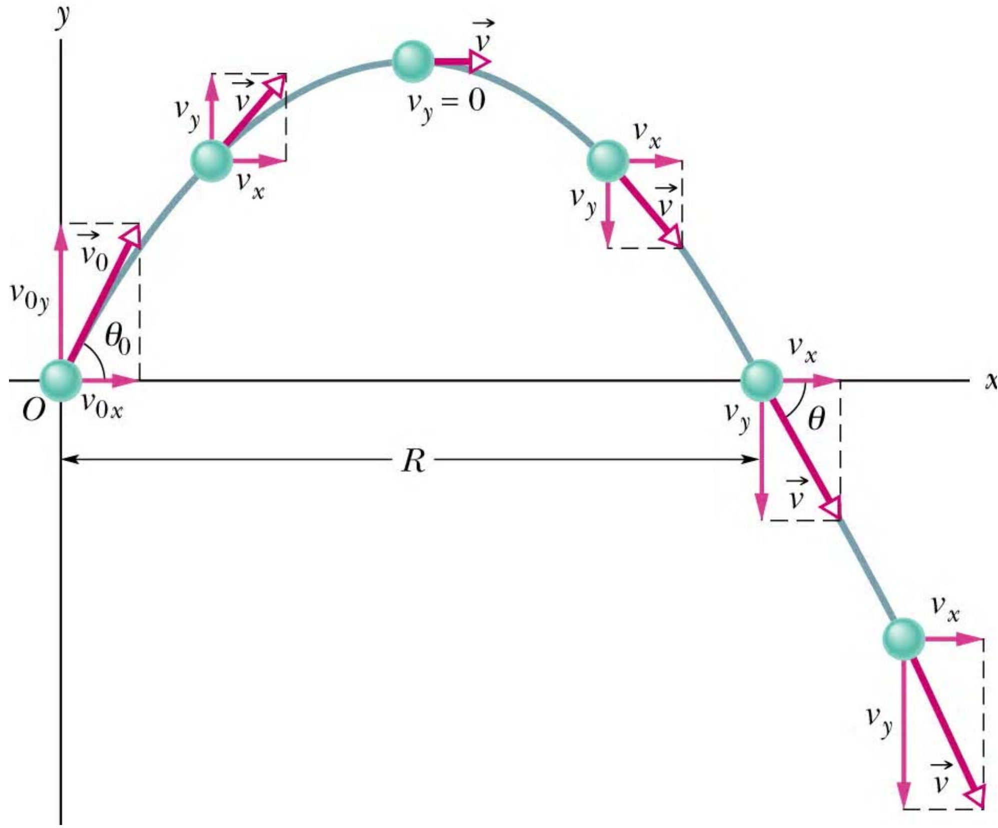
Parabel

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Weitere Beispiele für den schrägen Wurf (Trajektorie: Wurfparabel)

Stroboskopaufnahme Tennisball

Springbrunnen



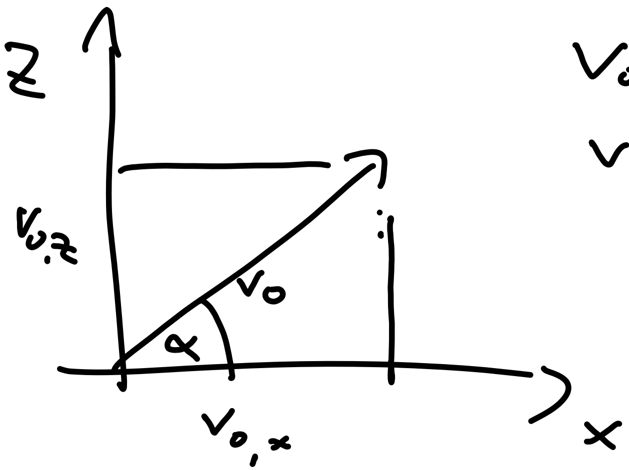
2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Wie weit kann man springen mit einer Absprunggeschwindigkeit von v_0=10 m/s ?

Berechnung des optimalen Absprungwinkels

-> Betrachte eine Punktmasse

Dann äquivalente Frage:
-> Wie weit fliegt eine Kugel mit v_0 = 10 m/s?



$v_{0,x} = v_0 \cdot \cos\alpha$

$v_{0,z} = v_0 \cdot \sin\alpha$

$x(t) = v_{0,x} \cdot t$

$z(t) = v_{0,z} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

Zum Zeitpunkt der Landung $z(t_1) = 0$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Wie weit kann man springen mit einer Absprunggeschwindigkeit von v_0=10 m/s ?

$$z(t_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow v_{0,z} \cdot t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t_1^2 - \frac{2v_{0,z}}{g} t = 0$$

$$\Leftrightarrow t_1 \cdot \left(t_1 - \frac{2v_{0,z}}{g} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{t_1 = 0}_{\text{Absprung}} \quad \vee \quad \underbrace{t_1 - \frac{2v_{0,z}}{g} = 0}_{\text{Landung}}$$

$$t_1 = \frac{2v_{0,z}}{g}$$

Sprungweite

$$x(t_1) = v_{0,x} \cdot t_1$$

$$= v_{0,x} \cdot 2 \cdot v_{0,z} \cdot \frac{1}{g}$$

$$= 2 v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha \cdot \frac{1}{g}$$

$$= v_0^2 \sin(2\alpha) \cdot \frac{1}{g}$$

$$2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \sin 2\alpha$$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Wie weit kann man springen mit einer Absprunggeschwindigkeit von v_0=10 m/s ?

$$x(t_1) = v_0^2 \sin(2\alpha) \cdot \frac{1}{g}$$

$$\sin(2\alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \alpha = 90^\circ$$

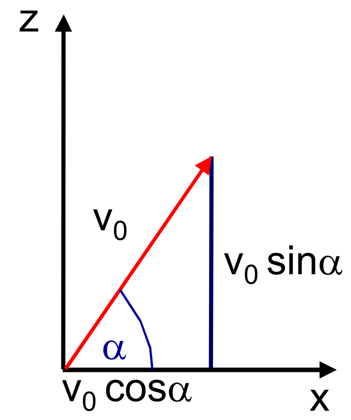
$$\Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$x_{max} = v_0^2 \sin(2 \cdot 45^\circ) \cdot \frac{1}{g}$$

$$= \left(10 \, m/s\right)^2 \cdot \frac{1}{10 \, m/s^2}$$

$$= 10 \, \frac{m^2}{s^2} \frac{s^2}{m} = 10 \, m$$

Wie weit fliegt eine Kugel mit v_0 = 10 m/s?



0) Zerlegung von v_0 in: $\quad \mathbf{v_{0,x} = v_0 \cos\alpha, \quad v_{0,z} = v_0 \sin\alpha}$

gleichförmige Bewegung in x: $\quad \mathbf{x(t) = v_{0,x}\, t}$

senkrechter Wurf in z: $\quad \mathbf{z(t) = v_{0,z}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2}$

1) Zeit t_1 der Landung:

bei der Landung ist $z(t_1) = 0$: $\quad z(t_1) = v_{0,z}\, t_1 - \frac{1}{2} g\, t_1^2 = 0$

(z=0 gilt auch beim

Absprung bei $t_0 = 0$)

$\Rightarrow \quad \mathbf{t_1 = 2\, v_{0,z} / g}$

2) Sprungweite

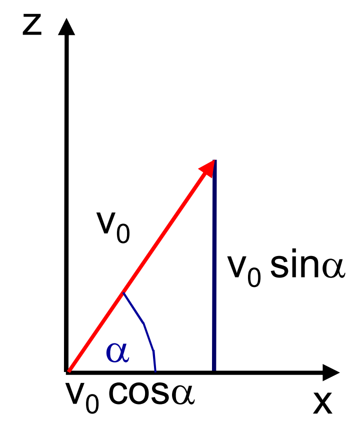
$$\mathbf{x(t_1) = v_{0,x}\, t_1 = 2\, v_{0,x}\, v_{0,z} / g = 2\, v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha / g = v_0^2 \sin(2\alpha) / g}$$

[aus Formelsammlung: 2 sina cosa = sin(2a)]

Wie weit fliegt eine Kugel mit v_0 = 10 m/s?

3) Optimaler Winkel α:

Weite ist maximal, wenn $\sin(2\alpha)$ maximal ist
➔ $\alpha = 45°$ *(unabhängig von v_0)* *[$(\sin 90°)=1$]*



4) Endergebnis:

Maximale Sprungweite:
$x_{max} = v_0^2 \sin(90°) / g \sim (100\ m^2/s^2) / (10\ m/s^2) = 10\ m$

Wie **hoch** fliegt die **Kugel** ?

am Maximum gilt: $v_z(t_m) = v_{0,z} - g\, t_m = 0$ ➔ $t_m = v_{0,z} / g$

➔ $z(t_m) = v_{0,z}\, t_m - \frac{1}{2} g\, t_m^2 = \frac{1}{2}\, v_{0,z}^2 / g = \frac{1}{2} (v_0 \sin\alpha)^2 / g \approx 2.50\ m$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Wie weit kann man springen mit einer Absprunggeschwindigkeit von v_0=10 m/s ?

Berechnung des optimalen Absprungwinkels

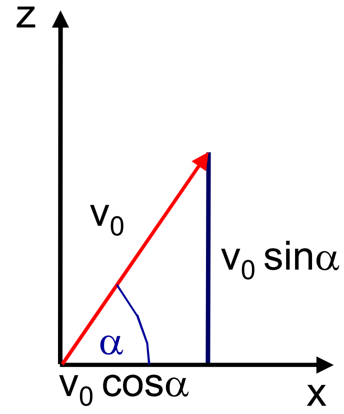
Betrachte eine Punktmasse:

1) Zerlegung von v_0 in $v_{0,x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0,z} = v_0 \sin\alpha$

2) Zeit t_1 der Landung: $t_1 = 2\, v_0 \sin\alpha / g$
   (aus senkrechtem Wurf)

3) Weite $x_{max}(\alpha) = v_0^2 \sin 2\alpha / g$

4) Optimaler Winkel: $\alpha = 45°$
   (unabhängig von v_0)

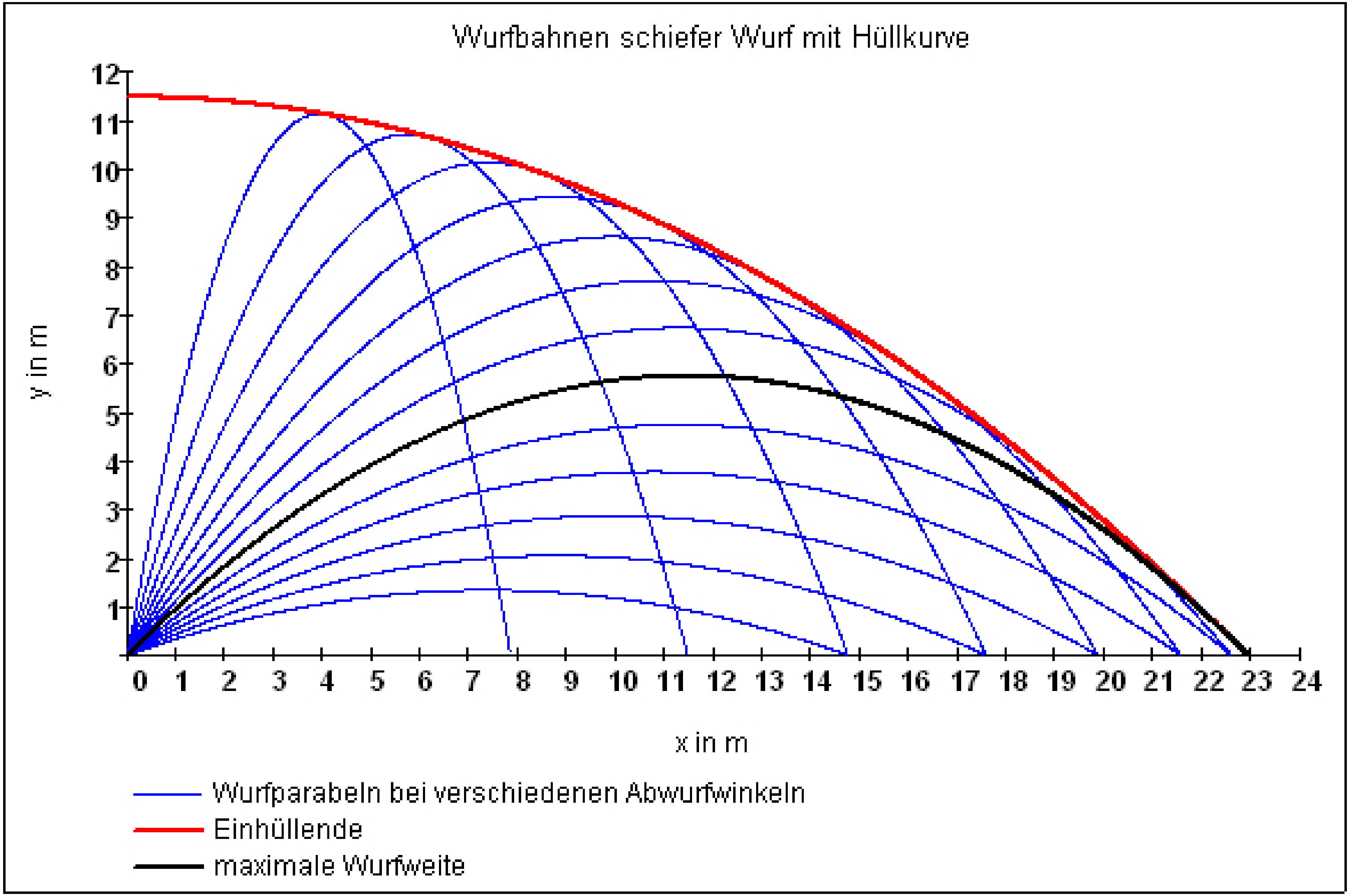


Wie **weit** fliegt eine **Kugel** bei **v_0 = 10 m/s** und α=45° ? $x_{max}(45°) \approx$ **10 m**

Wie **hoch** fliegt die **Kugel** ? $z_{max}(45°) \approx$ **2.50 m**

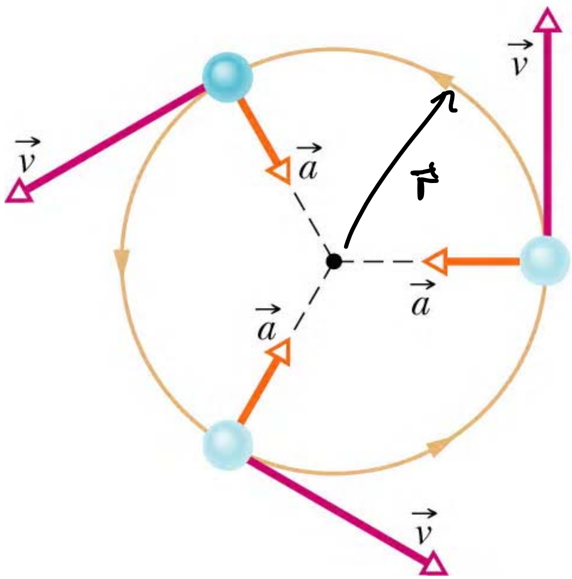
Weitsprungweltrekord: **8.95 m** (*Mike Powell 1991*)

Variation des Wurfwinkels



2.1.2 Kinematik in 2 und 3D: Kreisbewegung

gleichförmige Kreisbewegung



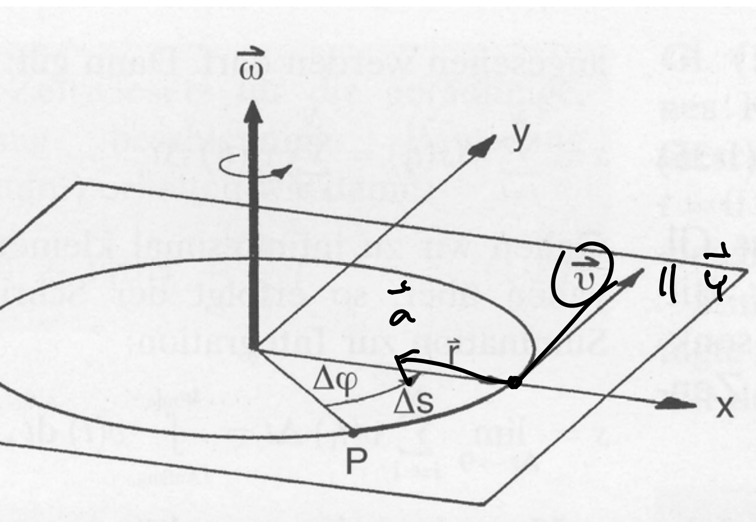
$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

beschleunigte Bewegung:

Betrag der **Bahngeschwindigkeit v** ändert sich nicht, aber die **Richtung**

Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}$ ist immer **senkrecht zur Geschwindigkeit (konstant)** und zum Kreismittelpunkt gerichtet

Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) [rad/s] $\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$ $\boxed{\omega = 2\pi\nu}$ **Frequenz [1/s = 1Hz]**



gleichförmige Kreisbewegung
➔ ω = const; $\varphi = \omega \cdot t$

$(x = v \cdot t)$

$$\boxed{T = \frac{1}{\nu}}$$ **Perioden-dauer [s]**

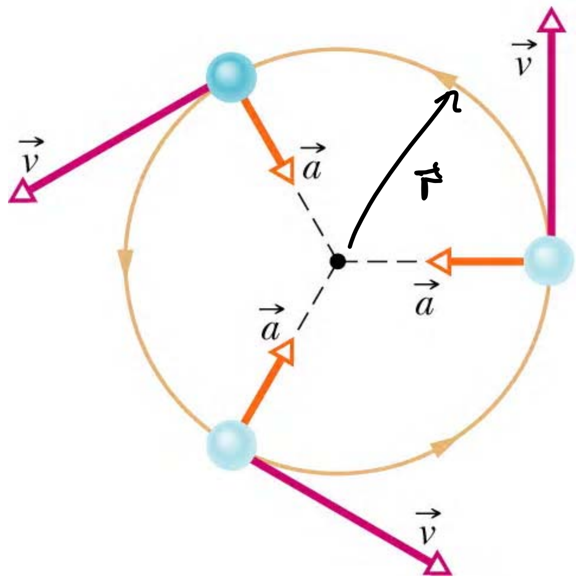
Bahngeschwindigkeit $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$ $v = \omega r$

Zentripetalbeschleunigung $\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}}$

$$\boxed{a = \omega^2 r = v^2 / r}$$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3D: Kreisbewegung

gleichförmige Kreisbewegung



$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

beschleunigte Bewegung:

Betrag der **Bahngeschwindigkeit v** ändert sich nicht, aber die **Richtung**

Zentripetalbeschleunigung a $\vec{}$ ist immer **senkrecht zur Geschwindigkeit (konstant)**

Woher kommen diese Formeln? ⇒ Fachtutorium

Wi... enz

(Kreisfrequenz) [rad/s] $\boxed{\ldots \, dt}$ **[1/s = 1Hz]**

gleichförmige Kreisbewegung

➔ ω = const; $\varphi = \omega \cdot t$

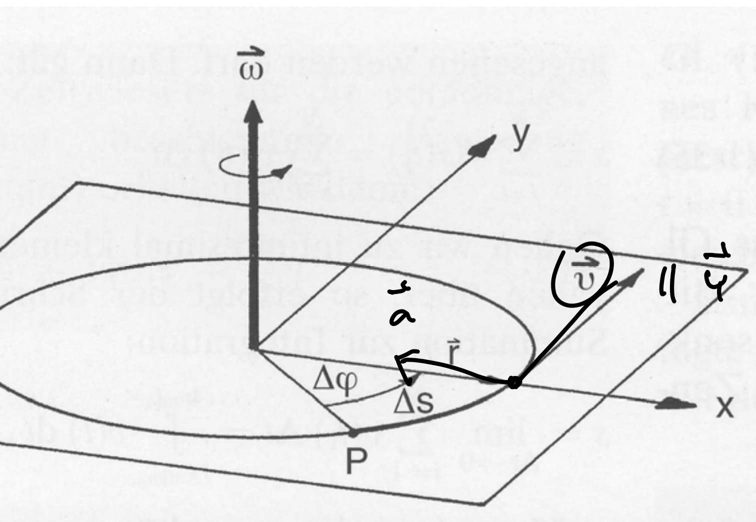
$(x = v \cdot t)$

$$\boxed{T = \frac{1}{\nu}}$$ **Perioden-dauer [s]**

Bahngeschwindigkeit $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$ $v = \omega r$

Zentripetalbeschleunigung $\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}}$

$$\boxed{a = \omega^2 r = v^2 / r}$$



2.1.2 Kinematik in 2 und 3D: Kreisbewegung

gleichförmige Kreisbewegung

Bsp. 1: Karussell mit r = 5m und Periodendauer T = 6s (Umlauf in 6s)

➔ Frequenz $\nu = 1/6\ s^{-1} = 1/6$ Hz

➔ Winkelgeschwindigkeit $\omega = \pi/3$ rad s^{-1} ~ **1 rad s^{-1}**

➔ Bahngeschwindigkeit **v** = $5\pi/3\ ms^{-1}$ ~ **5 m/s**

➔ Zentripetalbeschleunigung **a** = $5\pi^2/9\ ms^{-2}$ ~ **5 m/s² ~ g/2**

Bsp. 2: Inline skates mit v = 4 m/s und Kurve mit r = 1 m:

➔ **ω = 4 rad s^{-1}**

➔ **a = 16 m/s² (~ 2 g)**

Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) [rad/s] $\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$

$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}}$ **Frequenz [1/s = 1Hz]**

gleichförmige Kreisbewegung

➔ ω = const; $\varphi = \omega \cdot t$

$\boxed{T = \frac{1}{\nu}}$ **Perioden-dauer [s]**

Bahngeschwindigkeit $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$ $v = \omega r$

Zentripetalbeschleunigung $\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}}$

$\boxed{a = \omega^2 r = v^2 / r}$

2.1.2 Kinematik in 2D und 3D: Zusammenfassung

In (2 und) **3 Dimensionen** wird die Bewegung durch die **Vektoren $\underline{r}(t)$, $\underline{v}(t)$ und $\underline{a}(t)$** beschrieben.

Geschwindigkeiten werden vektoriell addiert.

Die Bewegung eines Massenpunktes ist eindeutig durch seine **Bahnkurve $\underline{r}(t)$** beschrieben.

Es gilt $\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$

Ist die Beschleunigung $\underline{a}$ bekannt, so braucht man noch die Anfangsbedingungen $\underline{r}(t=0)$, $\underline{v}(t=0)$, um die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ zu errechnen

Die Richtungskomponenten können unabhängig voneinander behandelt werden. **(ungestörte Überlagerung von Bewegungen,** Superposition)

Wichtiges Beispiel: Wurfparabel, optimaler Abwurfwinkel 45°

gleichförmige Kreisbewegung: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ $\quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$ $\quad v = \omega r$ $\quad a = \omega^2 r$