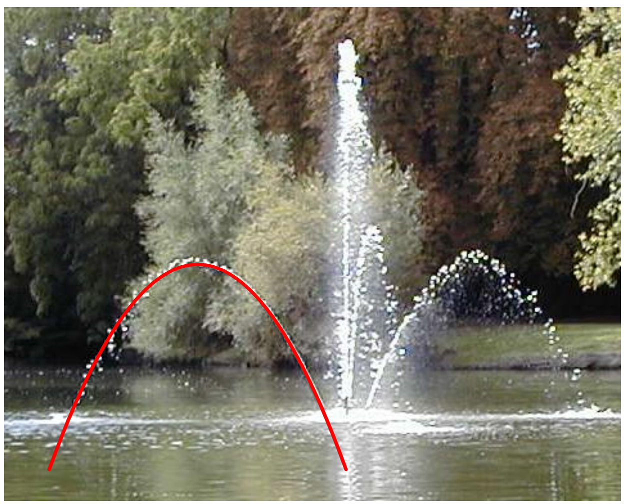
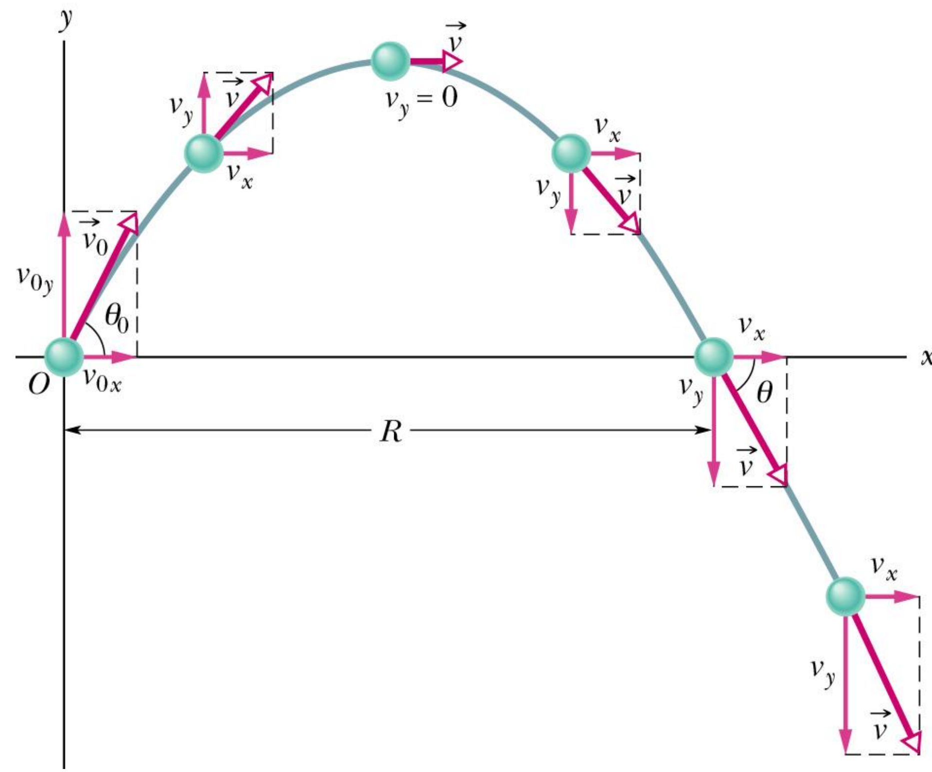
2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Weitere Beispiele für den schrägen Wurf (Trajektorie: Wurfparabel)

Stroboskopaufnahme Tennisball

Springbrunnen





2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

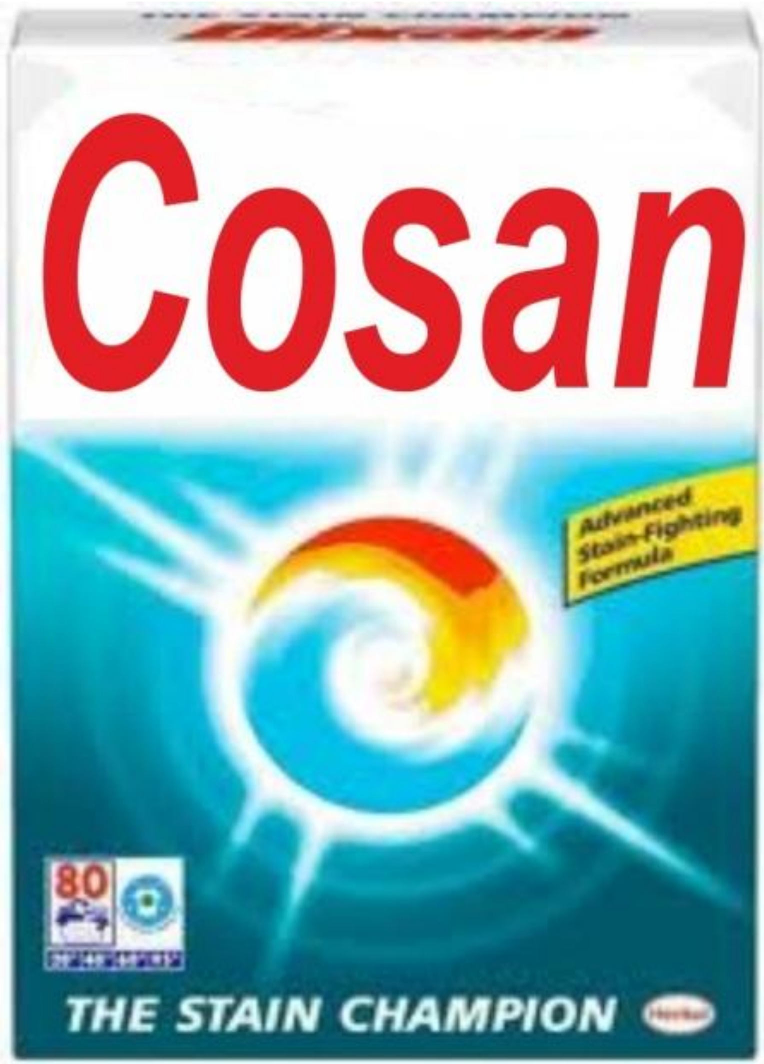
Wie weit kann man springen mit einer Absprunggeschwindigkeit von v_0=10 m/s ?

Berechnung des optimalen Absprungwinkels

-> Betrachte eine Punktmasse

Dann äquivalente Frage:

-> Wie weit fliegt eine Kugel mit v_0 = 10 m/s?


Cosan
Advanced
Stain-Fighting
Formula
80
THE STAIN CHAMPION

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Wie weit kann man springen mit einer Absprunggeschwindigkeit von v_0=10 m/s ?

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

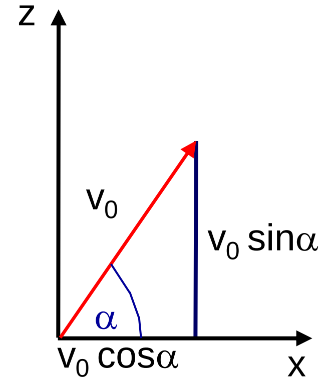
Wie weit kann man springen mit einer Absprunggeschwindigkeit von v_0=10 m/s ?

Wie weit fliegt eine Kugel mit v_0 = 10 m/s?

0) Zerlegung von v_0 in: $\mathbf{v_{0,x} = v_0 \cos\alpha, \quad v_{0,z} = v_0 \sin\alpha}$

gleichförmige Bewegung in x: $\mathbf{x(t) = v_{0,x}\, t}$

senkrechter Wurf in z: $\mathbf{z(t) = v_{0,z}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2}$



1) Zeit t_1 der Landung:

bei der Landung ist $z(t_1) = 0$: $z(t_1) = v_{0,z}\, t_1 - \frac{1}{2} g\, t_1^2 = 0$

$\Rightarrow$ $\mathbf{t_1 = 2\, v_{0,z} / g}$

(z=0 gilt auch beim

Absprung bei $t_0 = 0$)

2) Sprungweite

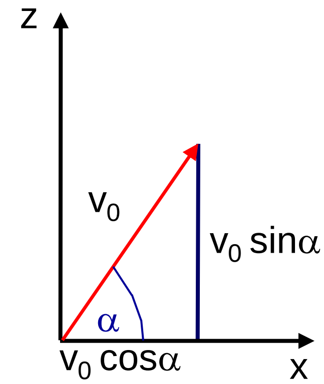
$$\mathbf{x(t_1) = v_{0,x}\, t_1 = 2\, v_{0,x}\, v_{0,z} / g = 2\, v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha / g = v_0^2 \sin(2\alpha) / g}$$

[aus Formelsammlung: 2 sina cosa = sin(2a)]

Wie weit fliegt eine Kugel mit v_0 = 10 m/s?

3) Optimaler Winkel α:

Weite ist maximal, wenn sin(2α) maximal ist
➔ **α = 45°** *(unabhängig von v_0)* *[(sin 90°)=1]*



4) Endergebnis:

Maximale Sprungweite:
$\mathbf{x_{max} = v_0^2 \sin(90°) / g \sim (100\ m^2/s^2) / (10\ m/s^2) = 10\ m}$

Wie **hoch** fliegt die **Kugel** ?

am Maximum gilt: $\mathbf{v_z(t_m) = v_{0,z} - g\, t_m = 0}$ ➔ $\mathbf{t_m = v_{0,z} / g}$

➔ $\mathbf{z(t_m) = v_{0,z}\, t_m - ½\, g\, t_m^2 = ½\, v_{0,z}^2 / g = ½\, (v_0 \sin\alpha)^2 / g \approx 2.50\ m}$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3 Dimensionen

Wie weit kann man springen mit einer Absprunggeschwindigkeit von v_0=10 m/s ?

Berechnung des optimalen Absprungwinkels

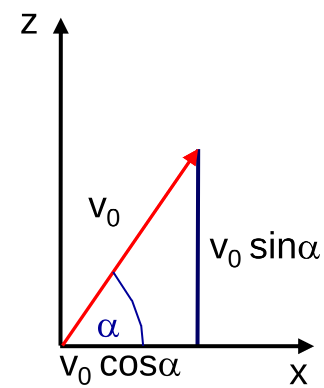
Betrachte eine Punktmasse:

1) Zerlegung von v_0 in $v_{0,x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0,z} = v_0 \sin\alpha$

2) Zeit t_1 der Landung: $t_1 = 2\, v_0 \sin\alpha / g$
(aus senkrechtem Wurf)

3) Weite $x_{max}(\alpha) = v_0^2 \sin 2\alpha / g$

4) Optimaler Winkel: **α = 45°**
(unabhängig von v_0)

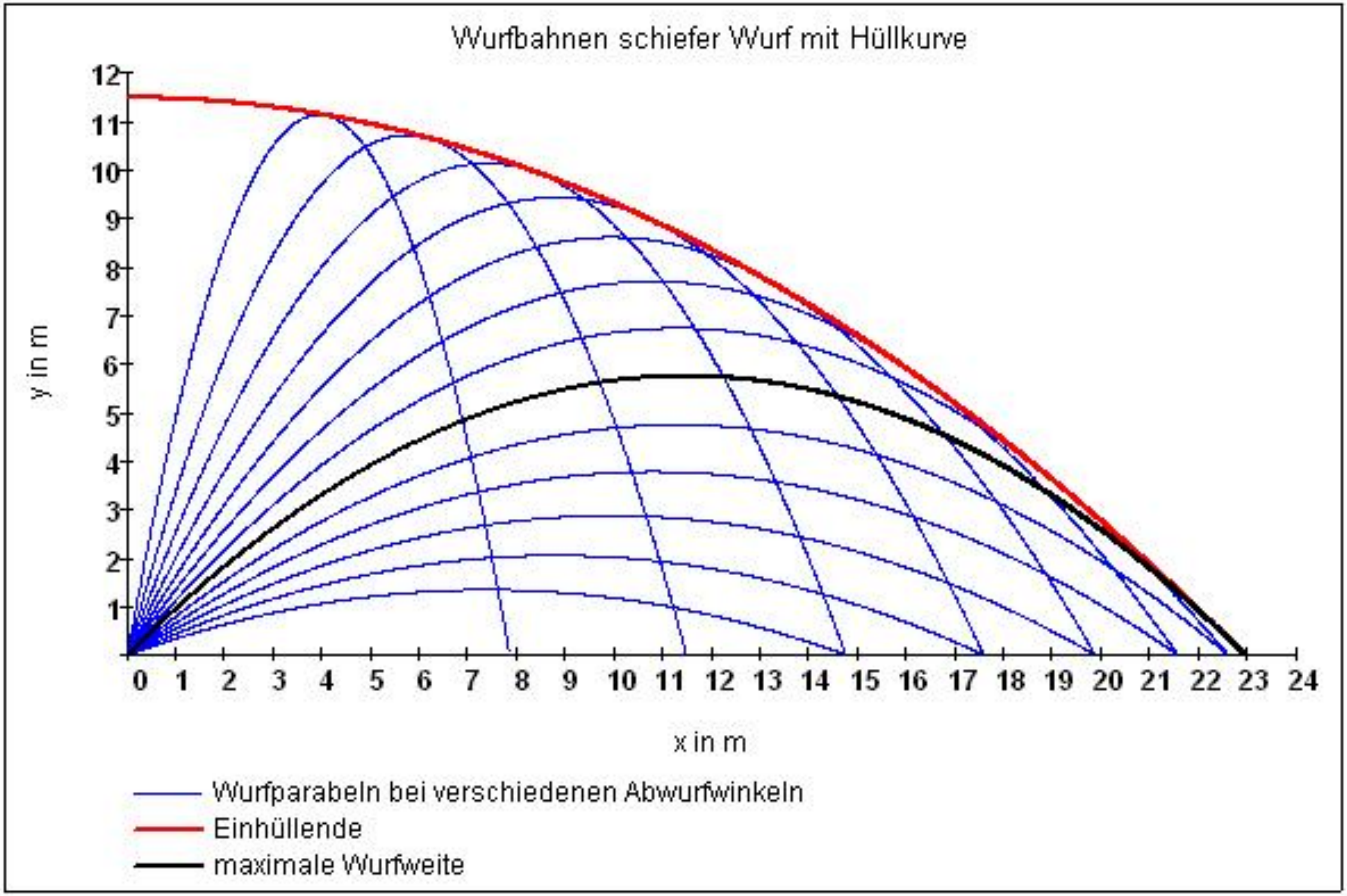


Wie **weit** fliegt eine **Kugel** bei **v_0 = 10 m/s** und α=45° ? $x_{max}(45°) \approx$ **10 m**

Wie **hoch** fliegt die **Kugel** ? $z_{max}(45°) \approx$ **2.50 m**

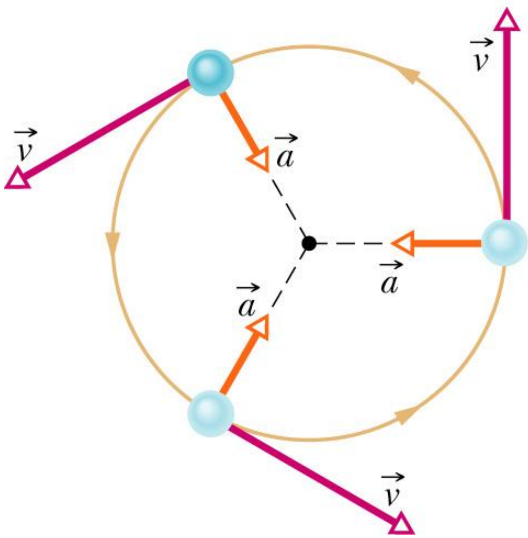
Weitsprungweltrekord: **8.95 m** (*Mike Powell 1991*)

Variation des Wurfwinkels



2.1.2 Kinematik in 2 und 3D: Kreisbewegung

gleichförmige Kreisbewegung



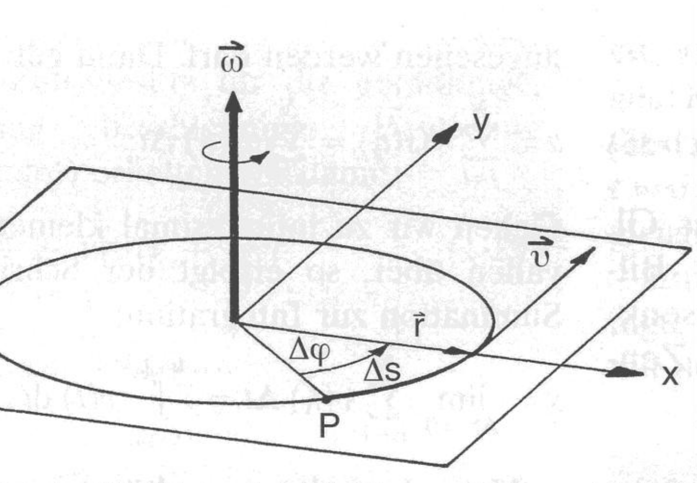
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

beschleunigte Bewegung:

Betrag der **Bahngeschwindigkeit v** ändert sich nicht, aber die **Richtung**

Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}$ ist immer **senkrecht zur Geschwindigkeit (konstant)** und zum Kreismittelpunkt gerichtet

Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) [rad/s] $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ $\omega = 2\pi\nu$ **Frequenz [1/s = 1Hz]**



gleichförmige Kreisbewegung

➔ ω = const; $\varphi = \omega \cdot t$

$$T = \frac{1}{\nu}$$ **Periodendauer [s]**

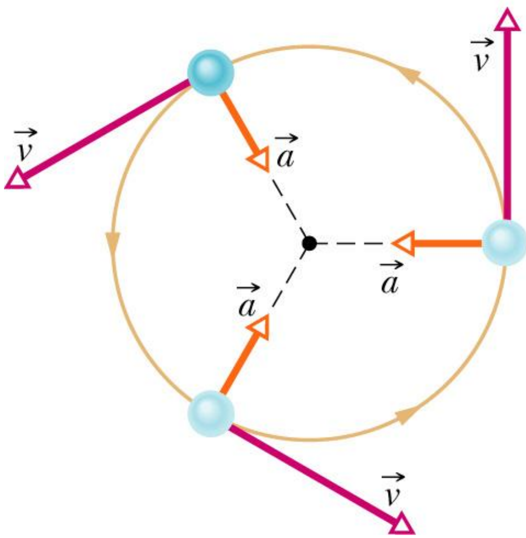
Bahngeschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $v = \omega r$

Zentripetalbeschleunigung $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$

$$a = \omega^2 r = v^2 / r$$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3D: Kreisbewegung

gleichförmige Kreisbewegung



$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

beschleunigte Bewegung:

Betrag der **Bahngeschwindigkeit v** ändert sich nicht, aber die **Richtung**

Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}$ ist immer **senkrecht zur Geschwindigkeit (konstant)**

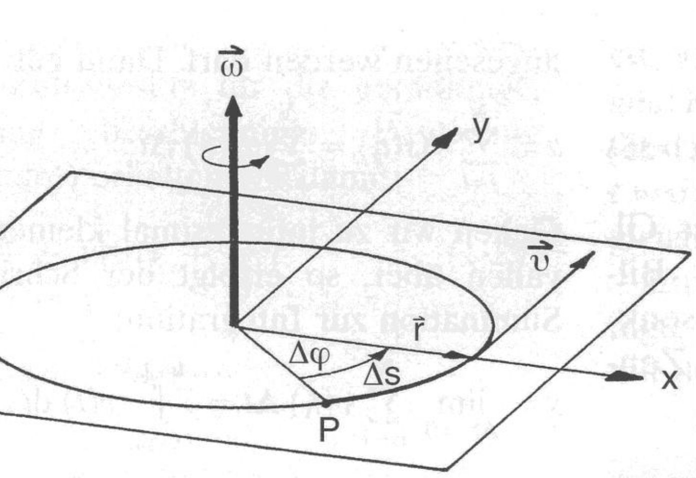
Woher kommen diese Formeln? ⇒ Fachtutorium

Wi… enz (Kreisfrequenz) [rad/s] … dt … **[1/s = 1Hz]**

gleichförmige Kreisbewegung
➔ ω = const; $\varphi = \omega \cdot t$

$$\boxed{T = \frac{1}{\nu}}$$

Perioden-dauer [s]



Bahngeschwindigkeit $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$ $\quad v = \omega r$

Zentripetalbeschleunigung $\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}}$

$$\boxed{a = \omega^2 r = v^2 / r}$$

Diamond Light Source, UK

Fachtutorium startet erst nächste Woche!

2.1.2 Kinematik in 2 und 3D: Kreisbewegung

gleichförmige Kreisbewegung

Bsp. 1: Karussell mit r = 5m und Periodendauer T = 6s (Umlauf in 6s)

➔ Frequenz ν = 1/6 s^{-1} = 1/6 Hz

➔ Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ = π/3 rad s^{-1} ~ **1 rad s^{-1}**

➔ Bahngeschwindigkeit **v** = 5π/3 ms^{-1} ~ **5 m/s**

➔ Zentripetalbeschleunigung **a** = 5π^2/9 ms^{-2} ~ **5 m/s² ~ g/2**

Bsp. 2: Inline skates
mit v = 4 m/s und
Kurve mit r = 1 m:

➔ **ω = 4 rad s^{-1}**

➔ **a = 16 m/s² (~ 2 g)**

Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) [rad/s] $\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$ $\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}}$ **Frequenz [1/s = 1Hz]**

gleichförmige Kreisbewegung
➔ ω = const; $\varphi = \omega \cdot t$

$\boxed{T = \frac{1}{\nu}}$ **Perioden-dauer [s]**

Bahngeschwindigkeit $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$ $v = \omega r$

Zentripetalbeschleunigung $\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}}$

$\boxed{a = \omega^2 r = v^2 / r}$

2.1.2 Kinematik in 2D und 3D: Zusammenfassung

In (2 und) **3 Dimensionen** wird die Bewegung durch die
Vektoren $\underline{r}$(t), $\underline{v}$(t) und $\underline{a}$(t) beschrieben.

Geschwindigkeiten werden vektoriell addiert.

Die Bewegung eines Massenpunktes ist eindeutig
durch seine **Bahnkurve $\underline{r}$(t)** beschrieben.

Es gilt $\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$

Ist die Beschleunigung $\underline{a}$ bekannt, so braucht man noch die Anfangsbedingungen $\underline{r}(t=0)$, $\underline{v}(t=0)$, um die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ zu errechnen

Die Richtungskomponenten können unabhängig voneinander behandelt werden.
(ungestörte Überlagerung von Bewegungen, Superposition)

Wichtiges Beispiel: Wurfparabel, optimaler Abwurfwinkel 45°

gleichförmige Kreisbewegung: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ $\quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$ $\quad v = \omega r$ $\quad a = \omega^2 r$

2. Mechanik starrer Körper: 2.2 Dynamik

Dynamik: Einfluss von Masse und Kraft auf die Bewegung

Inhalt:

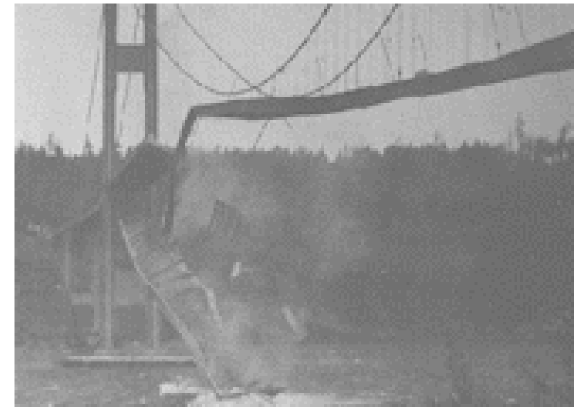
2.2.1 Kräfte

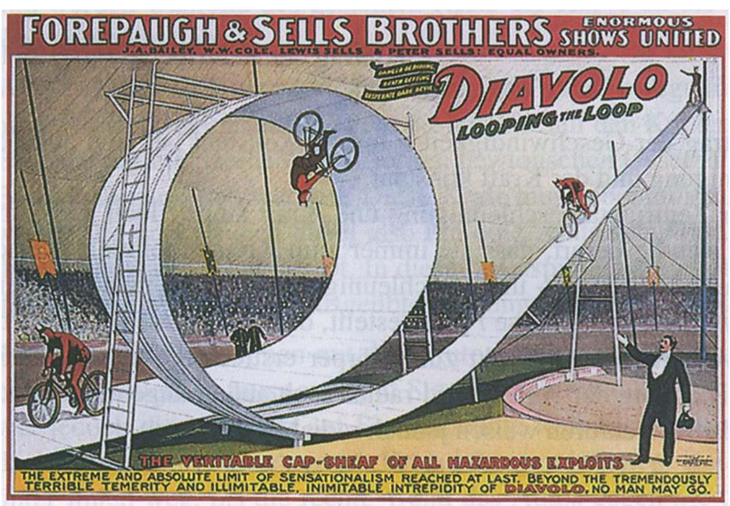
2.2.2 Impuls

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

2.2.4 Schwingungen

2.2.5 Rotation





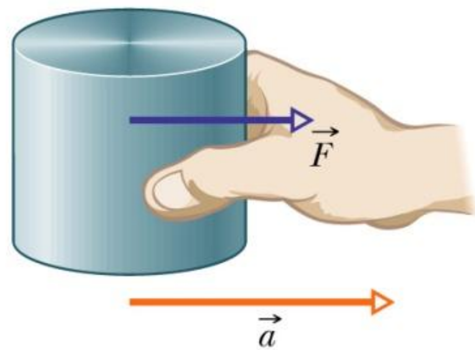
2.2.1 Kräfte: Newtonsche Axiome

1. Newtonsches Axiom: Trägheitsprinzip

Wenn auf einen Körper keine Kräfte einwirken, dann bleibt er im Zustand der gleichförmigen Bewegung (bzw. Ruhe).

2. Newtonsches Axiom: Aktionsprinzip

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



Einheit F: 1 Newton = 1N = 1 kg m/s^2

Anmerkungen:
1) Wirken mehrere Kräfte, so ist die resultierende Gesamtkraft zu bestimmen.

2) Das 1. Axiom ist ein Spezialfall des 2. für F=0, aber vor Newton dachte man, dass der natürliche Zustand eines Körpers die Ruhe sei, also „ohne Kraft keine Bewegung“. Dies wird durch das 1. Axiom revolutioniert.

3) Masse ist Ursache des Beharrungsvermögens, sie widersetzt sich der Änderung des Bewegungszustandes.
Experiment: Kugel am Faden

2.2.1 Kräfte: Newtonsche Axiome

3. Newtonsches Axiom:

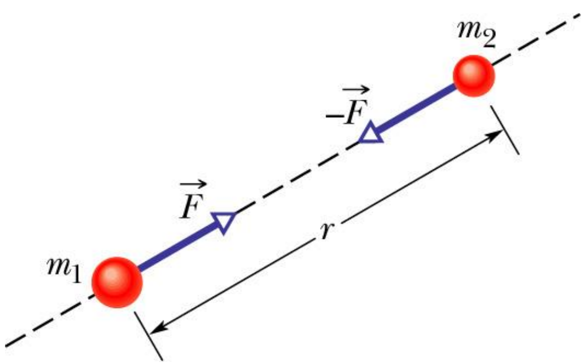
Reaktionsprinzip; „actio = reactio“

äquivalent: **Impulserhaltung** *(kommt später)*

Wenn **zwei Körper** (1 und 2) miteinander wechselwirken, dann besitzen die Kräfte, die die Körper aufeinander ausüben, **denselben Betrag** und **entgegengesetzte Richtungen**.

$$\boxed{\vec{F}_{1\mathrm{auf}\,2} = -\vec{F}_{2\mathrm{auf}\,1}}$$

Kraft-Gegenkraft-Paar $\underline{F}_{1auf2}$, $\underline{F}_{2auf1}$



Bsp.: Die Erde zieht genau so stark an der Sonne wie die Sonne an der Erde, nur in umgekehrte Richtung.

Experiment „Seilziehen“

2.2.1 Kräfte: Kräfte

Welche Kräfte gibt es ?

Erdanziehungskraft, Normalkraft, Schubkraft, Zentripetalkraft, Zentrifugalkraft, Reibungskraft, Corioliskraft, elektrostatische Anziehung/Abstoßung, magnetische Kräfte, Lorentzkraft, Muskelkraft, ….

Fundamentale Kräfte

Alle Kräfte lassen sich auf 4 elementare Wechselwirkungen (WW) zurückführen:

Gravitation (WW zwischen Massen)

Elektromagnetische WW (WW zwischen Ladungen)

Schwache WW
Starke WW } nur im Atomkern relevant

Viele Kräfte beruhen auf der elektromag. WW, z.B. Reibung, Muskelkraft, Bindungskräfte in Atomen, Molekülen und Festkörpern

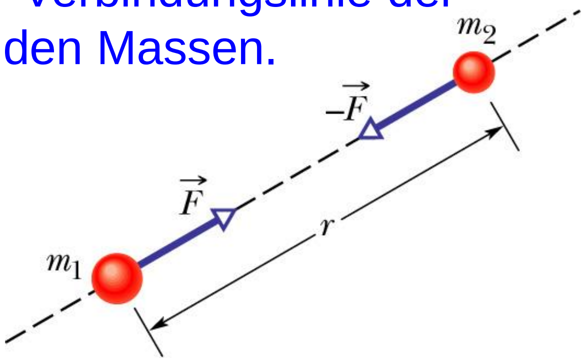
2.2.1 Kräfte: Gravitation

Gravitationsgesetz:

$$\boxed{F = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

Gravitationskonstante
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3/(s^2 \cdot kg)$
$\quad = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$

Kräfte zeigen in Richtung der Verbindungslinie der beiden Massen.



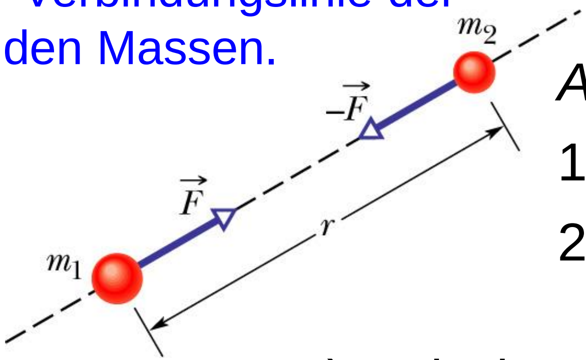
2.2.1 Kräfte: Gravitation

Gravitationsgesetz:

$$\boxed{F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

Gravitationskonstante
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3/(s^2 \cdot kg)$
$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$

Kräfte zeigen in Richtung der Verbindungslinie der beiden Massen.



Anmerkungen:

1) **Masse** ist Ursache der Gravitationskraft.

2) **Fernwirkung:** Jede Masse erzeugt ein **Kraftfeld**, das an jedem Punkt des Raumes existiert & die Kraft überträgt.

3) Zwischen 2 Elektronen ist die **elektromagn.** Kraft **10^{42} mal** größer als ihre Gravitationskraft

➔ Gravitation ist nur bei **sehr großen Massen** von Bedeutung

4) Grundlage für die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung

Wichtiger Spezialfall: m_E = Erdmasse, r_E = Erdradius, $m_2 = m$ = Masse eines Objektes auf der Erdoberfläche:

$$\boxed{F = g \cdot m}$$

In diesem Fall heißt die Gravitationskraft auch **Gewichtskraft, Schwerkraft**, oder Erdanziehung.

$$g = \frac{G \cdot m_E}{r_E^2}$$

2.2.1 Kräfte: Kraftmessung

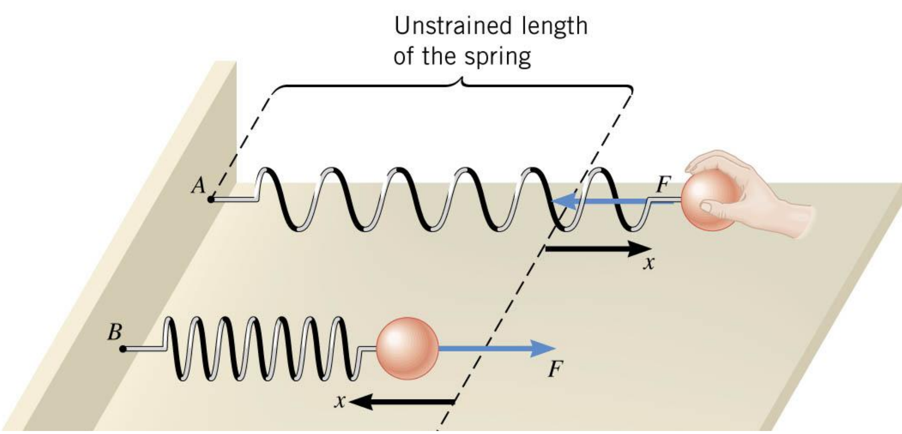
Wie messen wir Kräfte ?

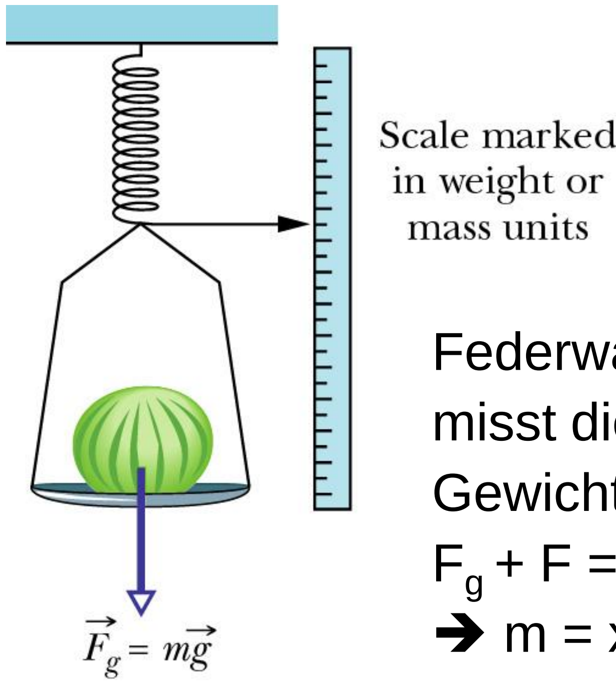
z.B. über eine Feder. Hookesches Gesetz:

Für kleine Auslenkungen *x* ist die Kraft *F* proportional zur Auslenkung:

(D heißt Federkonstante, Einheit: 1 N/m)

$$\boxed{\vec{F} = -D \cdot \vec{x}}$$





Federwaage misst die Gewichtskraft $\underline{F}_g$:

$F_g + F = mg - Dx = 0$

➔ $m = x\, D/g$

Federwaage: Ergebnis für die Masse hängt von *g* ab.

2.2.1 Kräfte: statisches Gleichgewicht

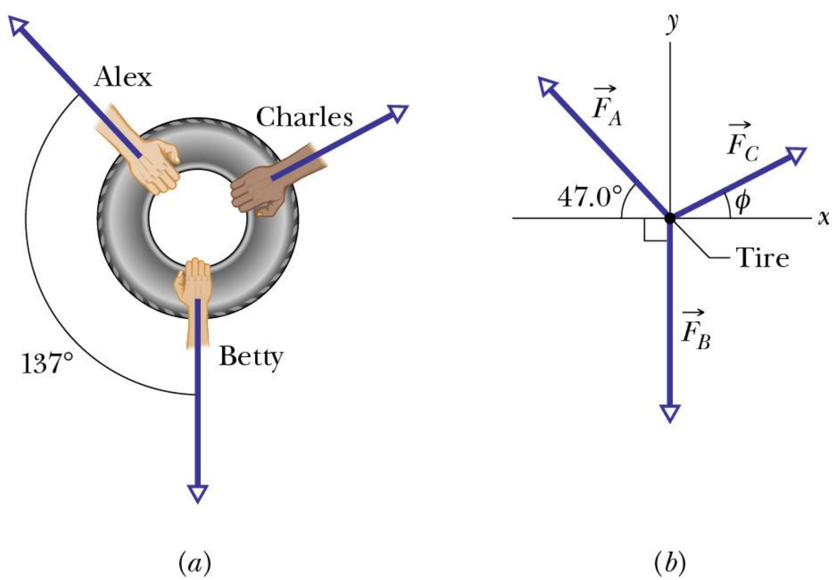
Kräfte sind additiv (Vektoren): $\underline{F}_{Ges} = \underline{F}_A + \underline{F}_B + ...$

Kräfte können vektoriell zerlegt werden (Beispiel: schiefe Ebene).

Bsp.: Die gesamte Gravitationskraft, die auf die Erde wirkt, ist die vektorielle Summe der Anziehungskraft von Sonne, Mond und ...

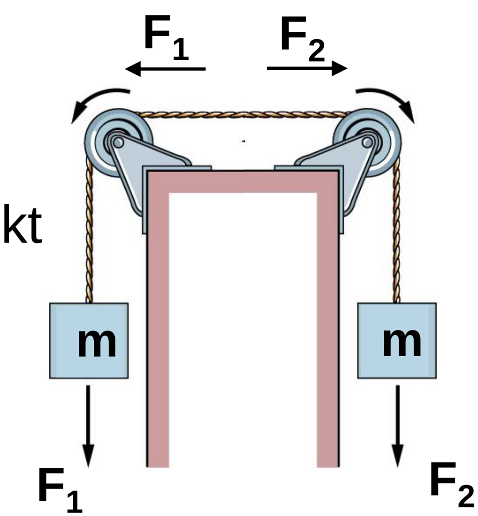
Statisches Gleichgewicht herrscht, wenn die **resultierende Gesamtkraft gleich Null** ist. *(Drehmomente werden später diskutiert)*

Bsp. 1



Bsp. 2

Rolle lenkt Kraft um



2.2.1 Kräfte: statisches Gleichgewicht

Experiment: 3 Gewichte

2.2.1 Kräfte: Kraft und Beschleunigung

2. Newtonsches Axiom: Kräfte sind die Ursache von Bewegungen:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Falls die **Kräfte** bekannt sind, kann daraus die **Beschleunigung** (und damit nach den Regeln der Kinematik die **Bahnkurve**) berechnet werden!

Bsp. 1: freier Fall

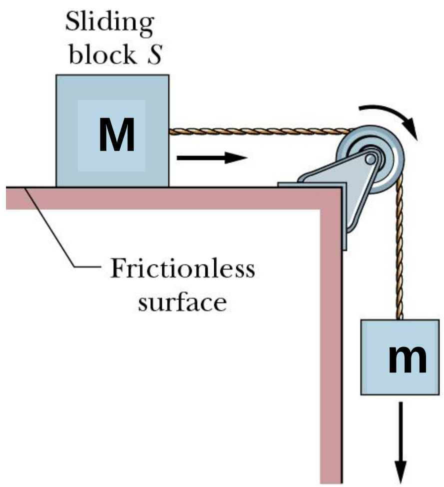
2.2.1 Kräfte: Kraft und Beschleunigung

2. Newtonsches Axiom: Kräfte sind die Ursache von Bewegungen:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Falls die **Kräfte** bekannt sind, kann daraus die **Beschleunigung** (und damit nach den Regeln der Kinematik die **Bahnkurve**) berechnet werden!

Bsp. 2: Zwei Massen, eine Rolle: Wie groß ist die Beschleunigung a ?



2.2.1 Kräfte: Kraft und Beschleunigung

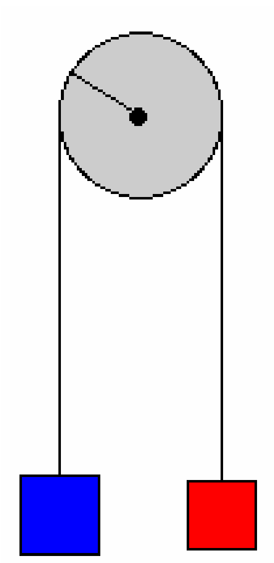
2. Newtonsches Axiom: Kräfte sind die Ursache von Bewegungen:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Falls die **Kräfte** bekannt sind, kann daraus die **Beschleunigung** (und damit nach den Regeln der Kinematik die **Bahnkurve**) berechnet werden!

Bsp. 3:

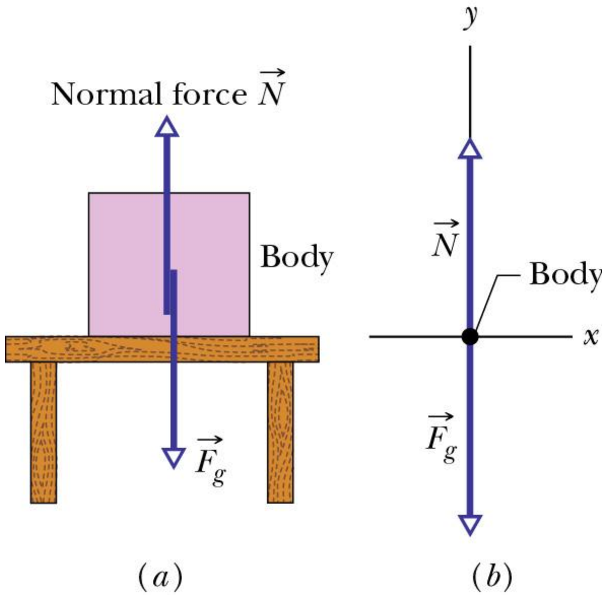
Atwoods Maschine - Wie groß ist die Beschleunigung a ?



2.2.1 Kräfte: Normalkraft

Normalkraft (*normal=senkrecht*)

Frage: Wieso bleibt der Körper trotz der Erdanziehung auf dem Tisch liegen ?



*Antwort: Die Kraft F_g = -mg, mit der der Körper auf den Tisch drückt, **verformt** diesen (s. **Matratze**).*

*Durch die Verformung wird die **Normalkraft F_N senkrecht zur Oberfläche** aufgebaut.*

2.2.1 Kräfte: *Bsp. Schlittenrennen*

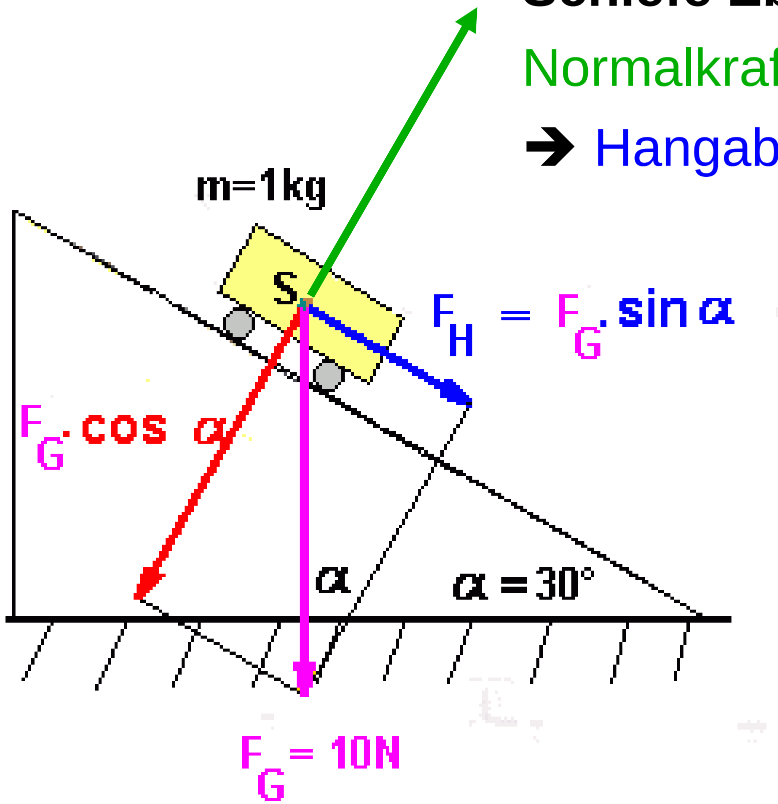
Kräfte sind additiv (Vektoren): $\underline{F}_{Ges} = \underline{F}_A + \underline{F}_B + \ldots$

Umgekehrt kann man eine Kraft in verschiedene Bestandteile **zerlegen**.

Bsp.: Schlittenrennen

2.2.1 Kräfte: *Bsp. Schlittenrennen*

2.2.1 Kräfte: Schiefe Ebene



Schiefe Ebene

Normalkraft ⊥ Oberfläche

➔ Hangabtriebskraft F_H || Oberfläche