2. Mechanik starrer Körper: 2.2 Dynamik

Dynamik: Einfluss von Masse und Kraft auf die Bewegung

Inhalt:

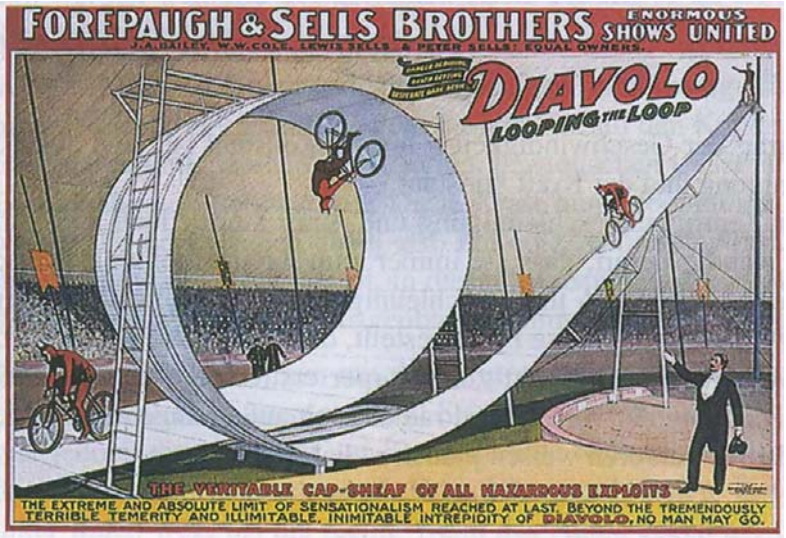
2.2.1 Kräfte

2.2.2 Impuls

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

2.2.4 Schwingungen

2.2.5 Rotation



2. Mechanik starrer Körper: 2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

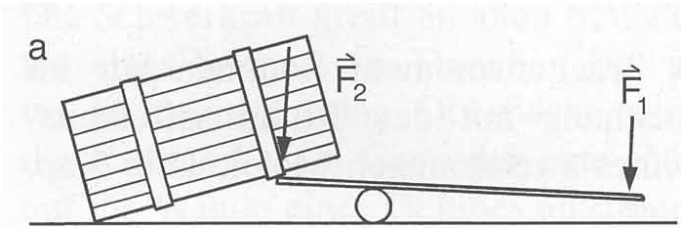
Manchmal interessiert uns **nicht der zeitliche Ablauf** der Bewegung, sondern nur **Anfangs- und Endzustand**, z.B. deren **Energie**.

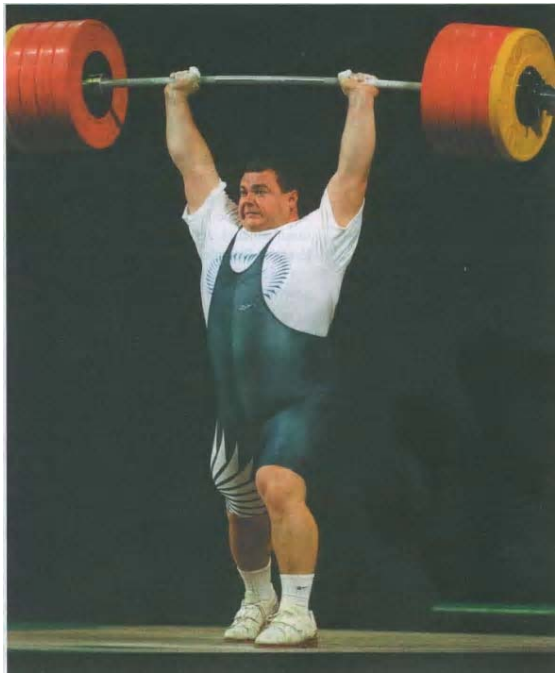
Mit **Erhaltungsgrößen** wie **Energie**, Impuls und Drehimpuls lassen sich Vorgänge oft viel einfacher beschreiben.

Energie E ist **gespeicherte Arbeit W**; **Leistung P** ist **Arbeit pro Zeit**.

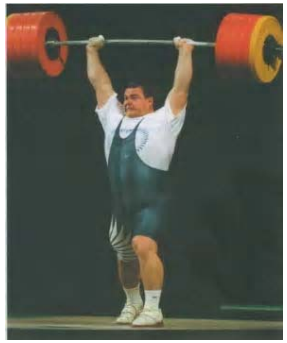
Arbeit ist proportional zu Kraft und Weg:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$$





2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung



Arbeit ist Kraft mal Weg:

$$W = F \cdot \Delta s$$

Einheit: 1 N m = 1 kg m^2/s^2 = 1 J (Joule)

(hier: konstante Kraft F parallel zum Weg Δs)

Es gibt verschiedene Formen von Arbeit:

Beschleunigungsarbeit, Hubarbeit, Spannarbeit, Reibungsarbeit, …

Mit diesen wird Energie von einer Form in eine andere überführt (Energieerhaltung):

kinetische Energie, potenzielle Energie, thermische Energie (Wärme), chemische Energie, …

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

Verallgemeinerungen:

- konstante Kraft F nicht parallel Δs

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$$

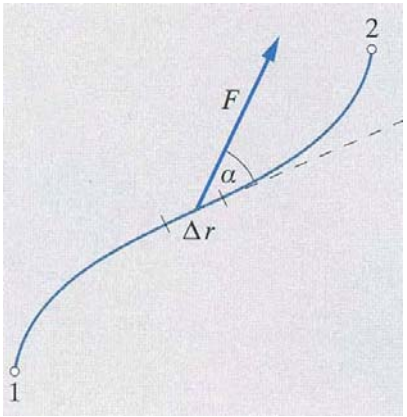
- Kraft F(s) hängt vom Ort ab

$$W = \int F(x)\,dx$$

- Weg nicht geradlinig

$$W = \int_1^2 \vec{F}(\vec{s})\,d\vec{s}$$

Linienintegral



2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

1) **konstante** Kraft F **parallel** zur Strecke Δs.

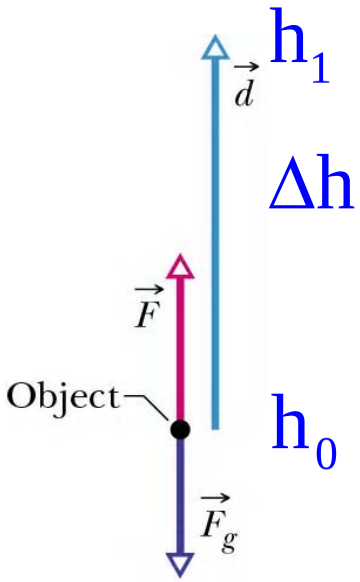
Dann gilt: $\boxed{W = F \cdot \Delta s}$

Bsp.: **Hubarbeit ⇔ potenzielle Energie** (Energie im ruhenden Körper)

Verrichtung von Arbeit gegen die Gravitationskraft.

$$W = F \cdot \Delta s = m \cdot g \cdot \Delta h \qquad \Rightarrow W = E_{pot}(h_1) - E_{pot}(h_0)$$

$$\boxed{\Rightarrow E_{pot} = m \cdot g \cdot h}$$



Die verrichtete Arbeit ist in dem Körper in Form von potenzieller Energie gespeichert.

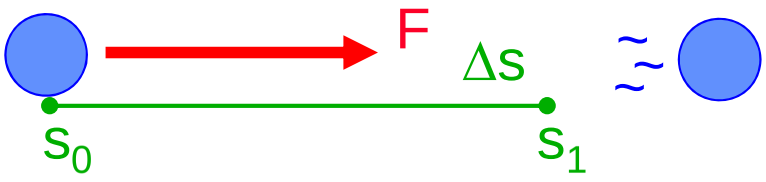
2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

1) **konstante** Kraft F **parallel** zur Strecke Δs.

Dann gilt: $\boxed{W = F \cdot \Delta s}$

Bsp.: **Beschleunigungsarbeit ⇔ kinetische Energie** (Energie in bewegter Masse)

Ein frei beweglicher Ball wird aus der Ruhe (v_0=0) mit einer konstanten Muskelkraft F über eine Strecke Δs auf die Geschwindigkeit v beschleunigt (keine Reibung, keine anderen Kräfte):



$$W = F \cdot \Delta s = ma \cdot \tfrac{1}{2} at^2 = \tfrac{1}{2} m(at)^2 = \tfrac{1}{2} mv^2$$

$$\Rightarrow W = E_{kin,1} - E_{kin,0} \Rightarrow \boxed{E_{kin} = \tfrac{1}{2} mv^2}$$

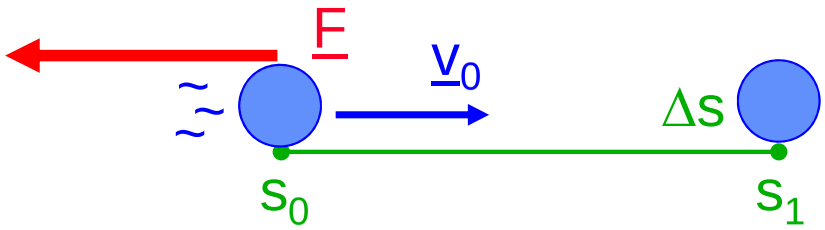
Die verrichtete Arbeit ist in dem Ball in Form von kinetischer Energie gespeichert.

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

➔ Arbeit kann **positiv** oder **negativ** sein.

Beispiele für negative Arbeit:

a) Abbremsen eines Balls von $v_{Anfang} = v_0$ nach $v_{Ende} = 0$ mit der Kraft F über die Strecke Δs (F ist **entgegengesetzt parallel** Δs).

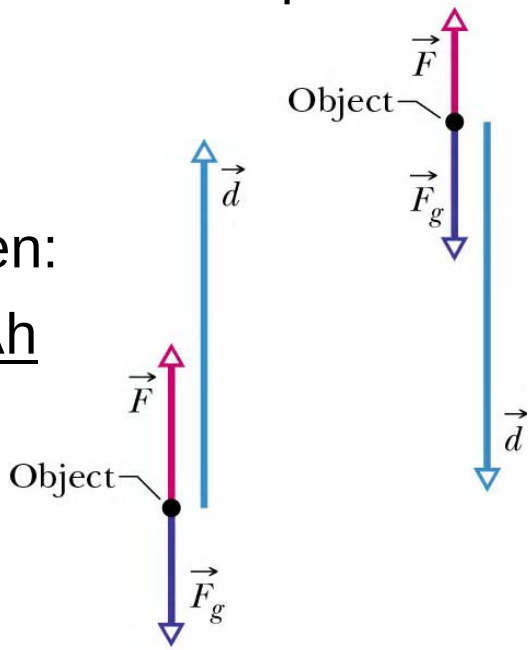


$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = -F \cdot \Delta s$$

b) Absenken eines Körpers um die Höhe Δh.

Heben:

F || Δh



Senken:

F ist entgegengesetzt parallel Δh.

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$$

$$= -mg \cdot \Delta h$$

Arbeit beim Halten eines Körpers am ausgestreckten Arm?

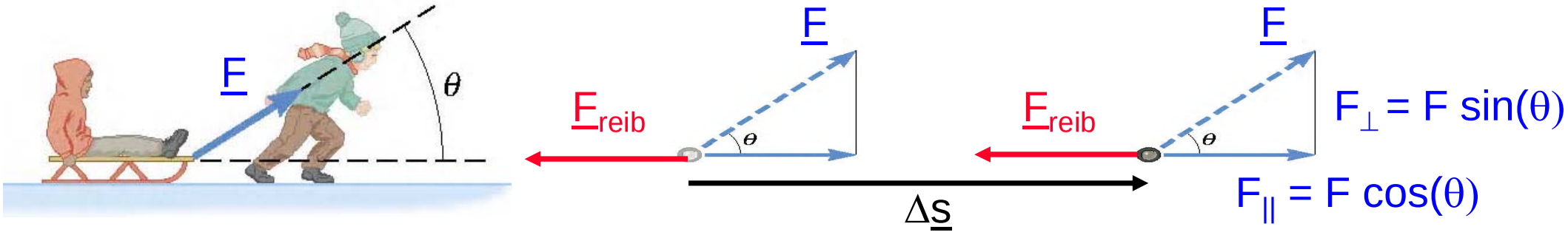
2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

2) **konstante** Kraft F **nicht parallel** zur Strecke Δs

Dann gilt:

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = F \cdot \Delta s \cdot \cos(\theta)}$$

Bsp.: **Reibungsarbeit ⇔ thermische Energie**



Es zählt nur die **Kraftkomponente $F_{||}$** entlang des Weges:

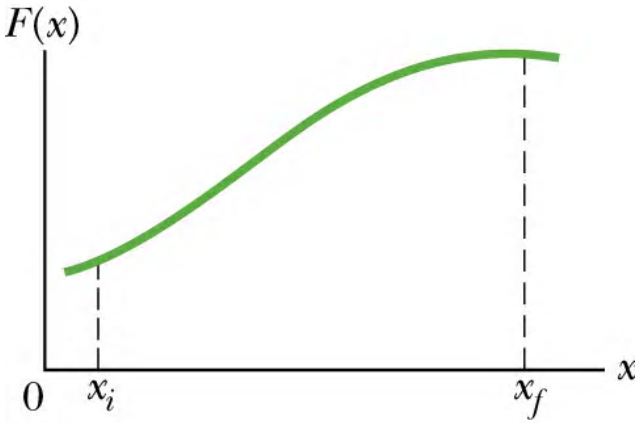
- $F_{||}$ leistet Arbeit gegen die Reibung
- *$F_{\perp}$ kompensiert einen Teil der Gewichtskraft, d.h. Normalkraft wird kleiner.*
  Aber mit $F_{\perp}$ ist hier keine Arbeit verbunden, da kein Weg parallel zu $F_{\perp}$ absolviert wird.
- *äquivalent: der Weg in Richtung der wirkenden Kraft*

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

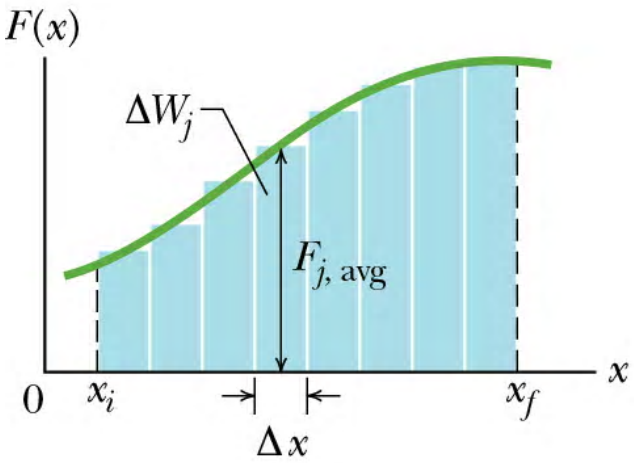
4) Variable Kraft F(x) parallel zur Strecke Δx (in x-Richtung):

$$W = \int F(x)\,dx$$

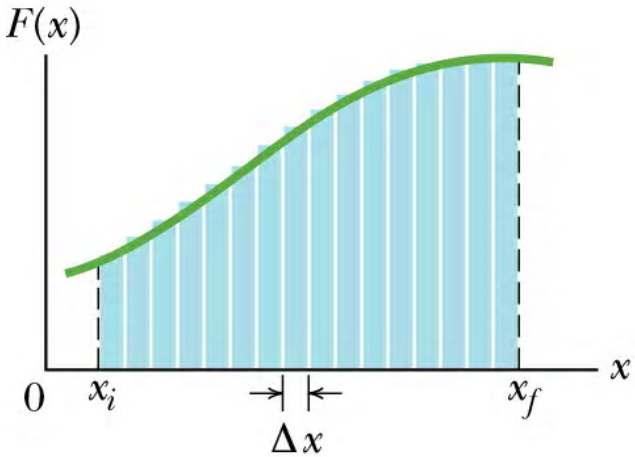
Zerlegung in viele Teilsummen $F(x_i)\cdot\Delta x_i$ mit (nahezu) konstanter Kraft $F(x_i)$ im Intervall Δx_i



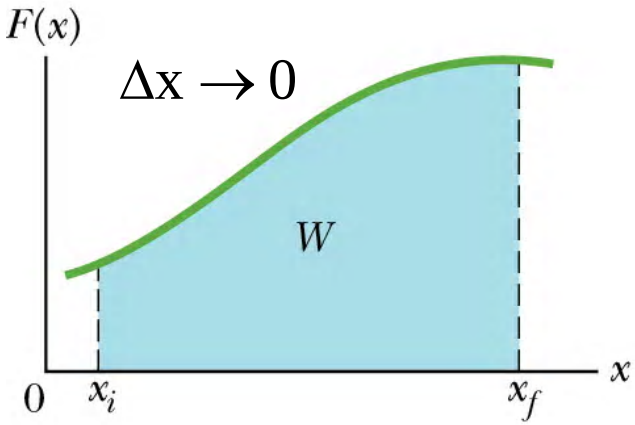
(a)



(b)



(c)



2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

4) Variable Kraft F(x) parallel zur Strecke x (in x-Richtung).

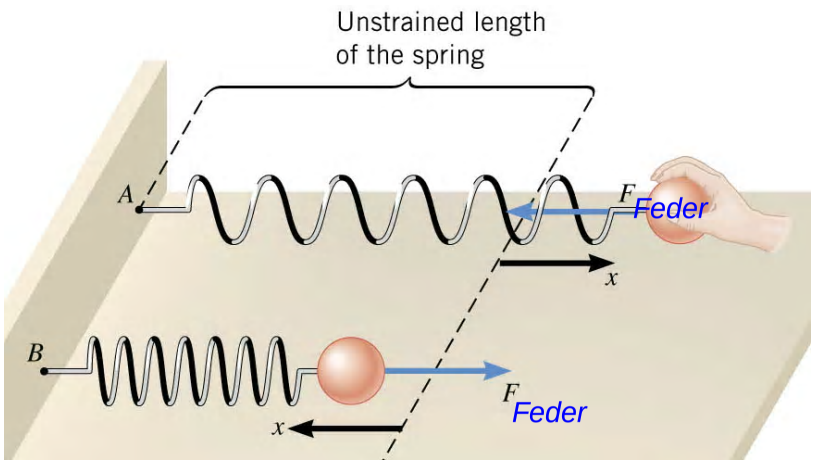
Dann gilt: $$W = \int F(x)\,dx$$

Bsp.: **Spannarbeit einer Feder ⇔ potenzielle Energie** (Energie im ruhenden Körper)

Feder zieht mit Kraft $F_{Feder} = -D\,x$ *(D = Federkonstante)*

Die Spannarbeit wird von der Kraft $\mathbf{F = -F_{Feder} = D\,x}$

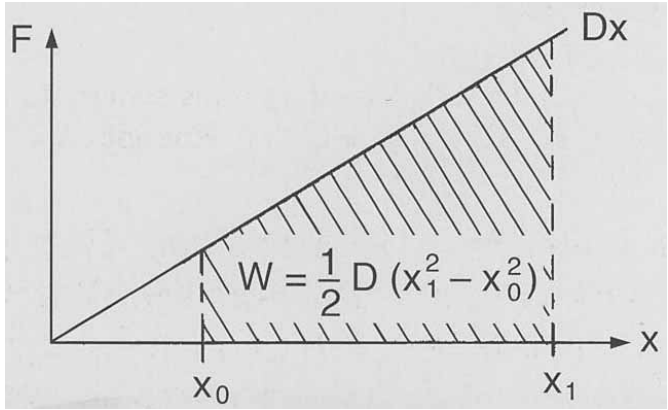
verrichtet, also gilt bei einer Auslenkung um x:



$$W = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} Dx\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}Dx^2\right]_{x_0}^{x_1} = \tfrac{1}{2}D(x_1^2 - x_0^2)$$

$$\Rightarrow E_{pot} = \tfrac{1}{2}Dx^2$$



Die verrichtete Arbeit ist in der Feder in Form von potenzieller Energie gespeichert.

x = 0 bei gestrichelter Linie.

Sowohl beim Ziehen (A) als auch beim Drücken (B) wird positive Spannarbeit verrichtet, d.h. F || x.

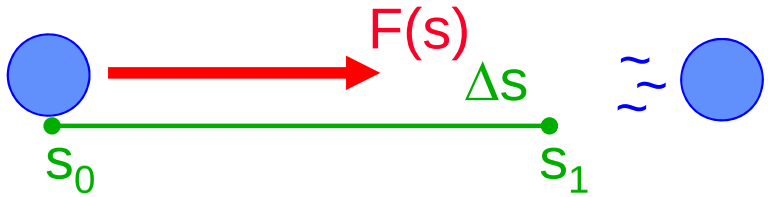
(Blau eingezeichnet: Kraft der Feder F_{Feder}!)

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

4) Variable Kraft F(s) parallel zur Strecke Δs (in s-Richtung).

Bsp.: **Beschleunigungsarbeit ⇔ kinetische Energie** (Energie in bewegter Masse)

Ein frei beweglicher Ball wird aus der Ruhe (v_0=0) mit einer **beliebig variierenden** Muskelkraft F(s) über eine Strecke Δs auf die Geschwindigkeit v_{End} beschleunigt (keine Reibung, keine anderen Kräfte):



End-Impuls: $p_{End} = m\, v_{End}$

$$W = \int_0^{s_{End}} F(s)\,ds = \int_{s_0=0}^{s_1=s_{End}} \frac{dp}{dt}\,ds = \int_0^{p_{End}} v\,dp = \int_0^{p_{End}} \frac{p}{m}\,dp = \frac{1}{m}\frac{p_{End}^2}{2} = \frac{1}{2} m \cdot v_{End}^2$$

oder: $$W = \int_0^{s_{End}} F(s)\,ds = \int_0^{s_{End}} m\,a\,ds = \int_0^{t_{End}} m \frac{dv}{dt}\frac{ds}{dt}\,dt = \int_0^{t_{End}} m \frac{dv}{dt}\,v\,dt = m\left[\tfrac{1}{2}v^2\right]_0^{t_{end}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{End}^2$$

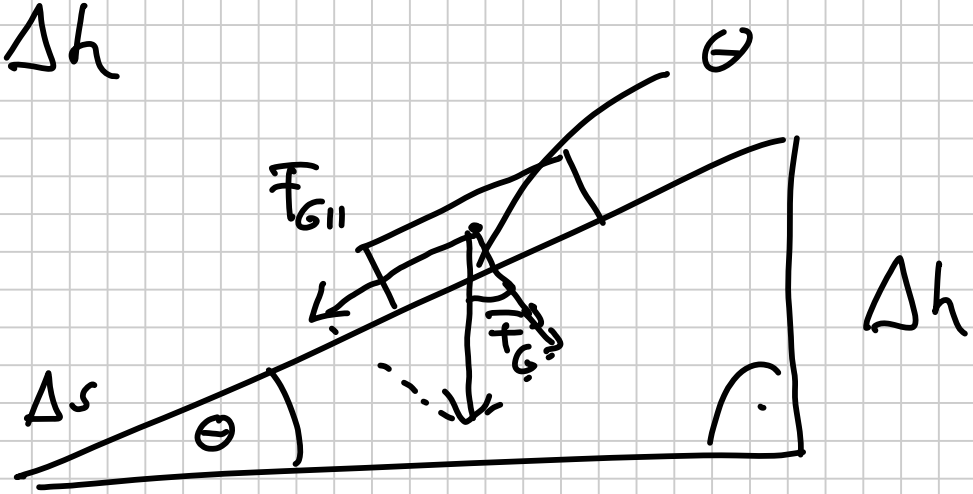
$$\boxed{E_{kin} = \tfrac{1}{2} m v_{End}^2}$$

Bei gleichem v_{End} ist die kinetische Energie unabhängig vom zeitlichen Ablauf der Beschleunigung.

Schiefe Ebene

Vergleich: Senkrechtem Heben

senkrecht: $W = F_G \cdot s = m \cdot g \cdot \Delta h$



$$\sin\Theta = \frac{\Delta h}{\Delta s}$$

$$\sin\Theta = \frac{F_{G\parallel}}{F_G}$$

$$W = F_{G\parallel}\,\Delta s = \sin\Theta \cdot F_G \cdot \frac{\Delta h}{\sin\Theta}$$

$$= F_G\,\Delta h = m \cdot g \cdot \Delta h$$

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

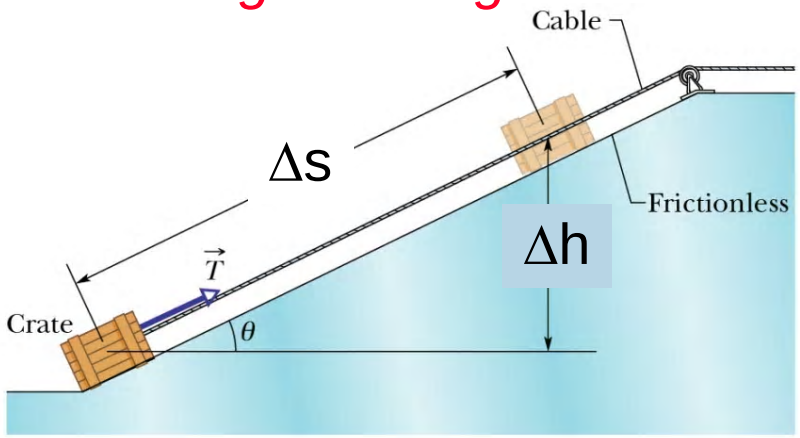
1) **konstante** Kraft F **parallel** zur Strecke Δs.

$$W = F \cdot \Delta s$$

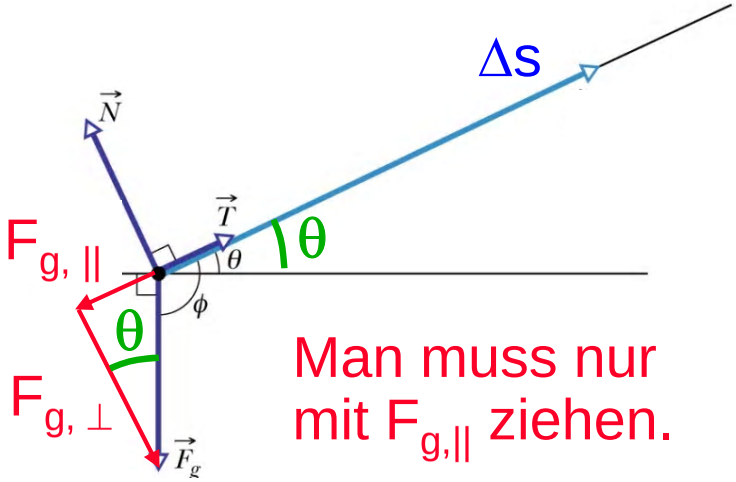
Bsp.: **Hubarbeit ⇔ potenzielle Energie**

Frage: Schiefe Ebene ➔ weniger Kraft ➔ weniger Arbeit ?

Aber: längerer Weg ?!



(a)



Man muss nur mit $F_{g,||}$ ziehen.

Eine schiefe Ebene erleichtert das Verrichten der Arbeit: (kleinere Kraft, aber längerer Weg).

1) senkrecht: $W = F\,s = m\,g\,\Delta h$

2) schiefe Ebene: $\sin\theta = F_{g,||} / F_g = \Delta h / \Delta s$

$\Rightarrow W = F_{g,||}\,\Delta s = (m\,g\,\sin\theta)\,(\Delta h / \sin\theta) = m\,g\,\Delta h$

Antwort: Nein, die Arbeit ist identisch,

d.h. Hubarbeit ist unabhängig vom genauen Weg, nur die Höhendifferenz zählt!

Daher ist die potenzielle Energie eindeutig:

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

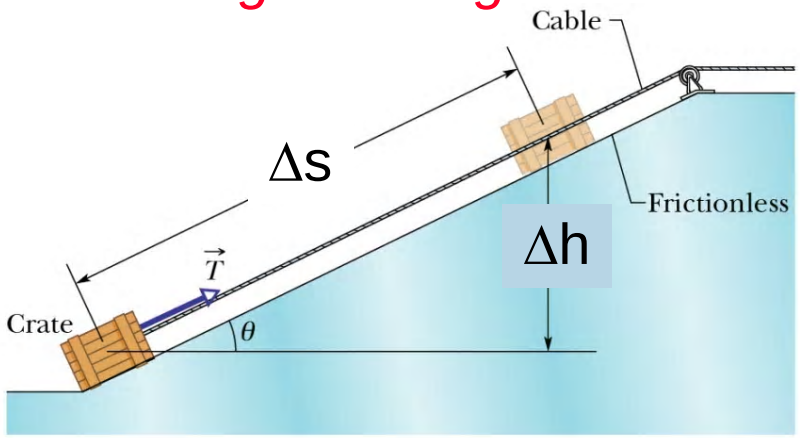
1) **konstante** Kraft F **parallel** zur Strecke Δs.

$$W = F \cdot \Delta s$$

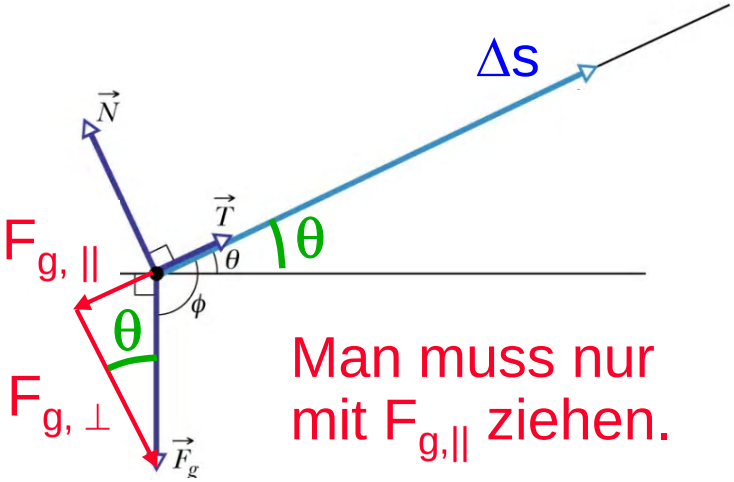
Bsp.: **Hubarbeit ⇔ potenzielle Energie**

Frage: Schiefe Ebene ➔ weniger Kraft ➔ weniger Arbeit ?

Aber: längerer Weg ?!



(a)



Man muss nur mit $F_{g,||}$ ziehen.

Eine schiefe Ebene erleichtert das Verrichten der Arbeit: (kleinere Kraft, aber längerer Weg).

1) senkrecht: $W = F\,s = m\,g\,\Delta h$

2) schiefe Ebene: $\sin\theta = F_{g,||} / F_g = \Delta h / \Delta s$

$\Rightarrow W = F_{g,||}\,\Delta s = (m\,g\,\sin\theta)\,(\Delta h / \sin\theta) = m\,g\,\Delta h$

Antwort: Nein, die Arbeit ist identisch,

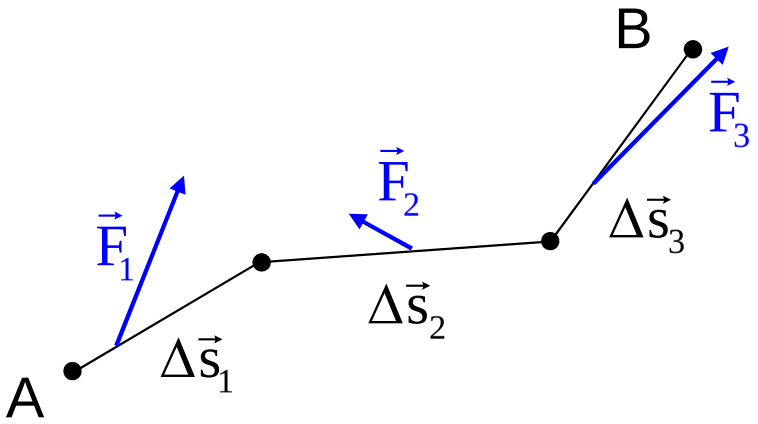
d.h. Hubarbeit ist unabhängig vom genauen Weg, nur die Höhendifferenz zählt!

Daher ist die potenzielle Energie eindeutig:

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

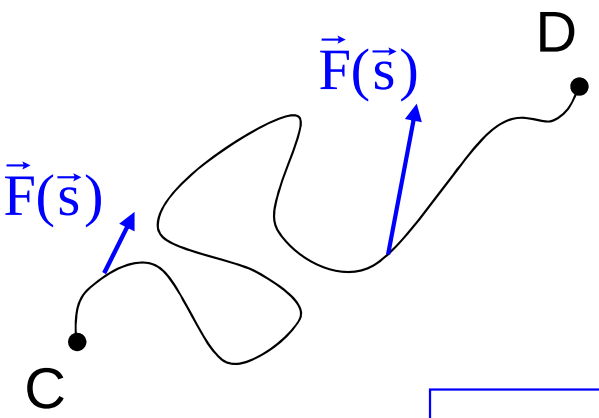
2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

3) Weg bzw. Strecke Δs **nicht geradlinig**



Bewegung von A nach B.
Auf jedem Wegstück Δs_i wirkt eine konstante Kraft F_i.

$$\Rightarrow W_{AB} = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i = \vec{F}_1 \Delta\vec{s}_1 + \vec{F}_2 \Delta\vec{s}_2 + \vec{F}_3 \Delta\vec{s}_3$$



Zerlegung in viele Teilsummen $F(s_i)\cdot\Delta s_i$ mit konstanter Kraft $F(s_i)$ im Intervall Δs_i

$$\Rightarrow W_{CD} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(\vec{s}_i) \cdot \Delta\vec{s}_i = \int_C^D \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

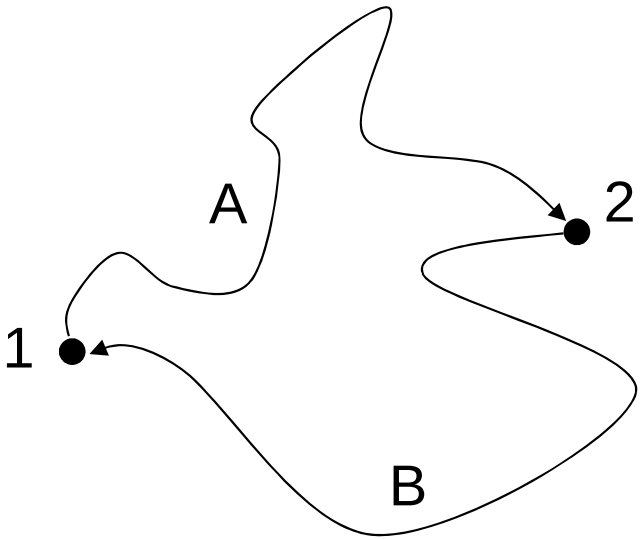
$N \to \infty$
$|\Delta s_i| \to 0$

$$\boxed{W = \int_1^2 \vec{F}(\vec{s})\, d\vec{s}}$$

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung:

Bei konservativen Kräften ist

die die Arbeit auf einem geschlossenen Weg = Null



$$W_{ges} = W_A + W_B = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} + \int_2^1 \vec{F} d\vec{s}$$

$$= \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} - \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = 0$$

Nur für konservative Kräfte lässt sich eine potenzielle Energie definieren.

Diese potenzielle Energie ändert sich nicht bei dem geschlossen Umlauf

von (1) über (2) nach (1).

Bsp. für konservative Kraft: Gravitationskraft, Federkraft

Bsp. für nicht-konservativ: Reibungskraft

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

Zwischenzusammenfassung:

$$W = \int \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

konstante (orts-unabh.) Kraft:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = F \cdot \Delta s \cdot \cos(\theta)$$

Kraft parallel zur Strecke Δs:
(d.h. $\theta = 0$)

$$W = F \cdot \Delta s$$

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

Zwischenzusammenfassung:

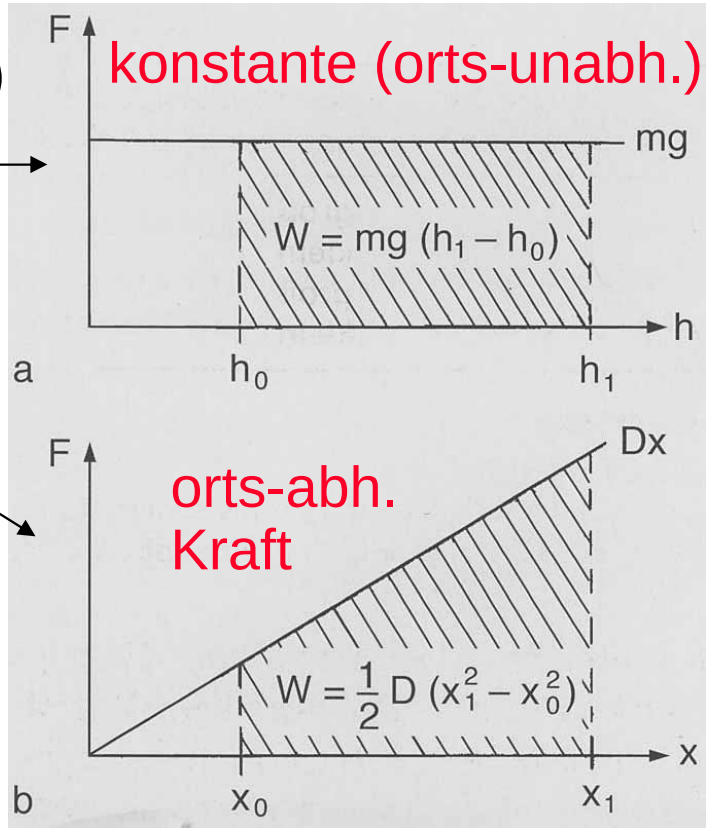
Die Verrichtung von Arbeit vermindert (oder vergrößert) die Energie eines Körpers.

Energie ist die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.

Energieformen in der Mechanik:

- **kinetische Energie** $E_{kin} = ½ m v^2$ aus Beschleunigungsarbeit *(unabhängig von Details des Beschleunigungs-vorgangs)*

- **potenzielle Energie** (im ruhenden Körper)
  - aus Hubarbeit: $E_{pot} = m g h$
  - aus Spannarbeit: $E_{pot} = ½ D x^2$



$$W = \int F \, ds$$

Weitere Energieformen:

- elektrische Energie
- thermische Energie (Wärme)
- chemische Energie
- ...

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

Energieerhaltungssatz:

Energie kann nur zwischen den verschiedenen Energieformen umgewandelt werden.

Sie kann weder aus dem Nichts erzeugt werden noch kann sie vernichtet werden.

Im abgeschlossenen System gilt:

- In der Mechanik (ohne Reibung): $E_{kin} + E_{pot} = const$

- Allgemein: $E_{kin} + E_{pot} + E_{elek} + E_{therm} + E_{chem} + \ldots = const$

Vorsicht in der Praxis:

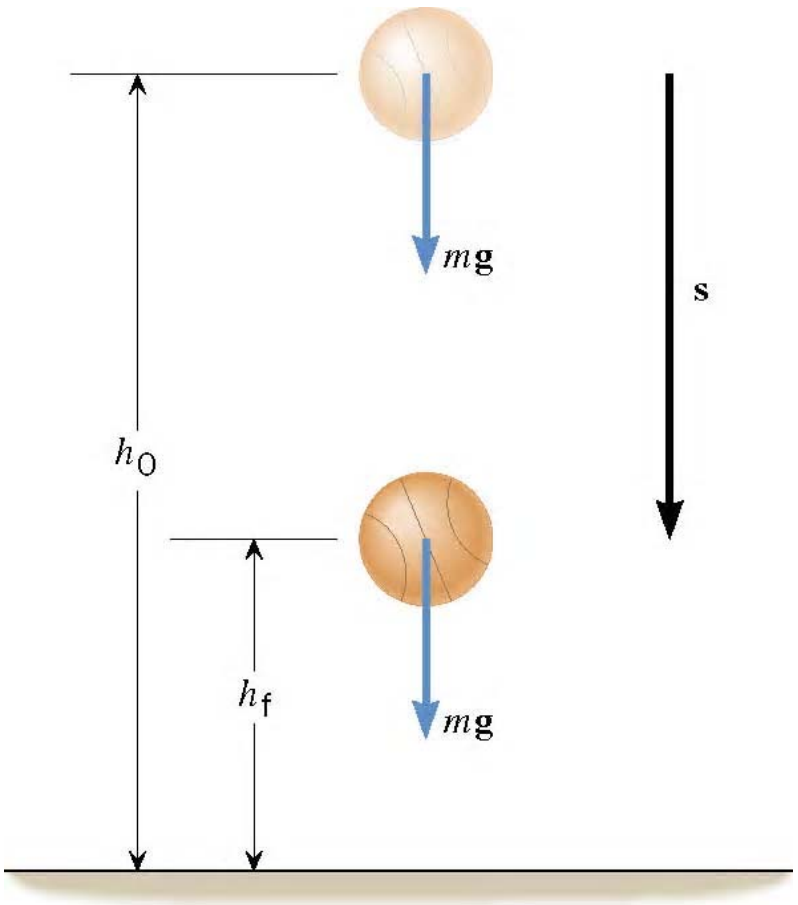
Ist das System wirklich (so gut wie) abgeschlossen oder

verliert es z.B. über Wärmestrahlung Energie nach draußen ?

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung: Beispiele

Beispiele für die Energieerhaltung:

Fallender Ball wandelt potenzielle Energie in kinetische Energie um:



Zu Beginn ruht der Ball auf der Höhe h_0.

Am Ende hat er auf der Höhe h=0 die Geschwindigkeit v.

$$E_{Anfang} = E_{Ende}$$

$$E_{kin,A} + E_{pot,A} = E_{kin,E} + E_{pot,E}$$

$$0 \quad + m g h_0 = \tfrac{1}{2} m v^2 + 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2 g h_0}$$

Dann wird E_{kin} in Deformationsenergie (chem. Energie der chem. Bindungen) umgewandelt, die dann wieder über E_{kin} nach E_{pot} …

Außerdem: Wärme

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung: Beispiele

Höhenunterschied: 93.5 m

➔ $\Delta E_{pot}=mgh$

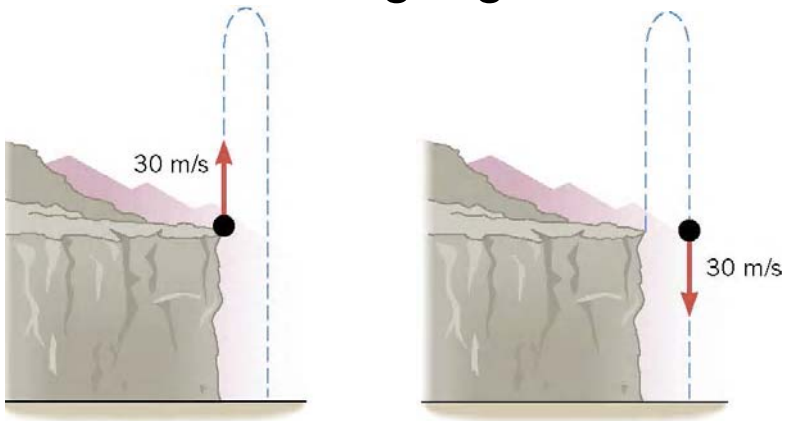
Geschwindigkeit oben: 3.0 m/s

Geschwindigkeit unten ? 42.9 m/s !

$\Delta E_{kin}=\Delta E_{pot}=mgh$

➔ $\frac{1}{2}\, m \cdot v_{unten}^2=\Delta E_{pot}+ \frac{1}{2}\, m \cdot v_{oben}^2$

Bei gleicher Höhe ist
die kinetische Energie gleich.



Bsp. Weitsprung aus Kapitel 2.1:
Wie hoch fliegt eine Kugel mit v_0 = 10 m/s bei einem Absprungwinkel von α = 45 ° ?

E_{kin} der vertikalen Bewegung wird in E_{pot} umgewandelt (unabhängig von der Horizontalbewegung):

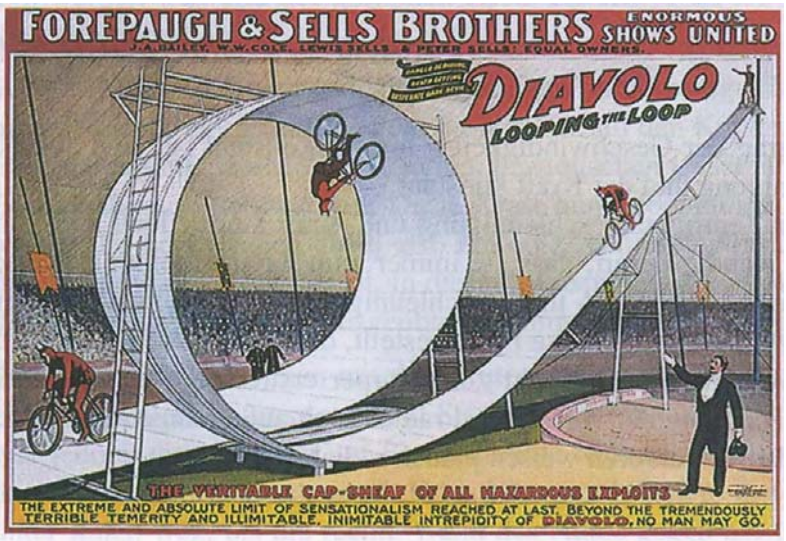
$m\, g\, h = \frac{1}{2}\, m\, (v_0 \sin \alpha)^2$ $\quad (\sin 45 = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}})$

$h = v_0^2 / (4\, g) \sim 2.5$ m

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung: Beispiele

Beispiele für die Energieerhaltung:

Wie schnell muss Diavolo zu Beginn unten am Looping (R=2.7m) sein ?



bisher (nur F_z): $v_{oben} = \sqrt{gR}$ ~ 5.1 m/s

$$E_{unten} = E_{oben}$$

$$\tfrac{1}{2} m v_{un}^2 = mg2R + \tfrac{1}{2} m v_{ob}^2$$

$$v_{un}^2 = 4gR + v_{ob}^2 = 4gR + gR$$

$$v_{un} = \sqrt{5gR}$$ ~ 12 m/s ~ 41 km/h

Wie viel Meter muss der Startpunkt höher als der Scheitelpunkt des Loopings sein ?

$$m g \Delta h = \tfrac{1}{2} m v_{ob}^2$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{v_{ob}^2}{2g} = R/2$$ = 1.35 m

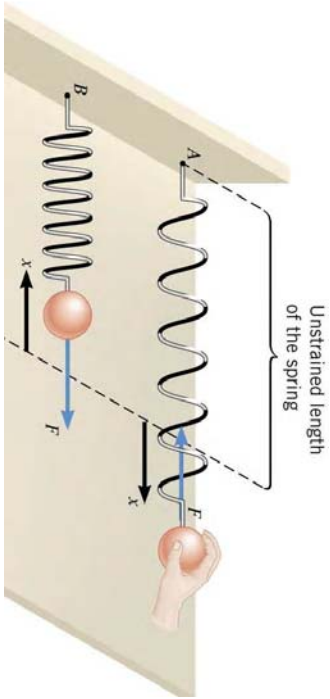
Und der Impuls ?

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung: Beispiele

Beispiele für die Energieerhaltung:

Vertikal schwingendes Federpendel:

periodische Umwandlung von
potenzieller Energie im Schwerefeld,
kinetischer Energie und
potenzieller Federenergie



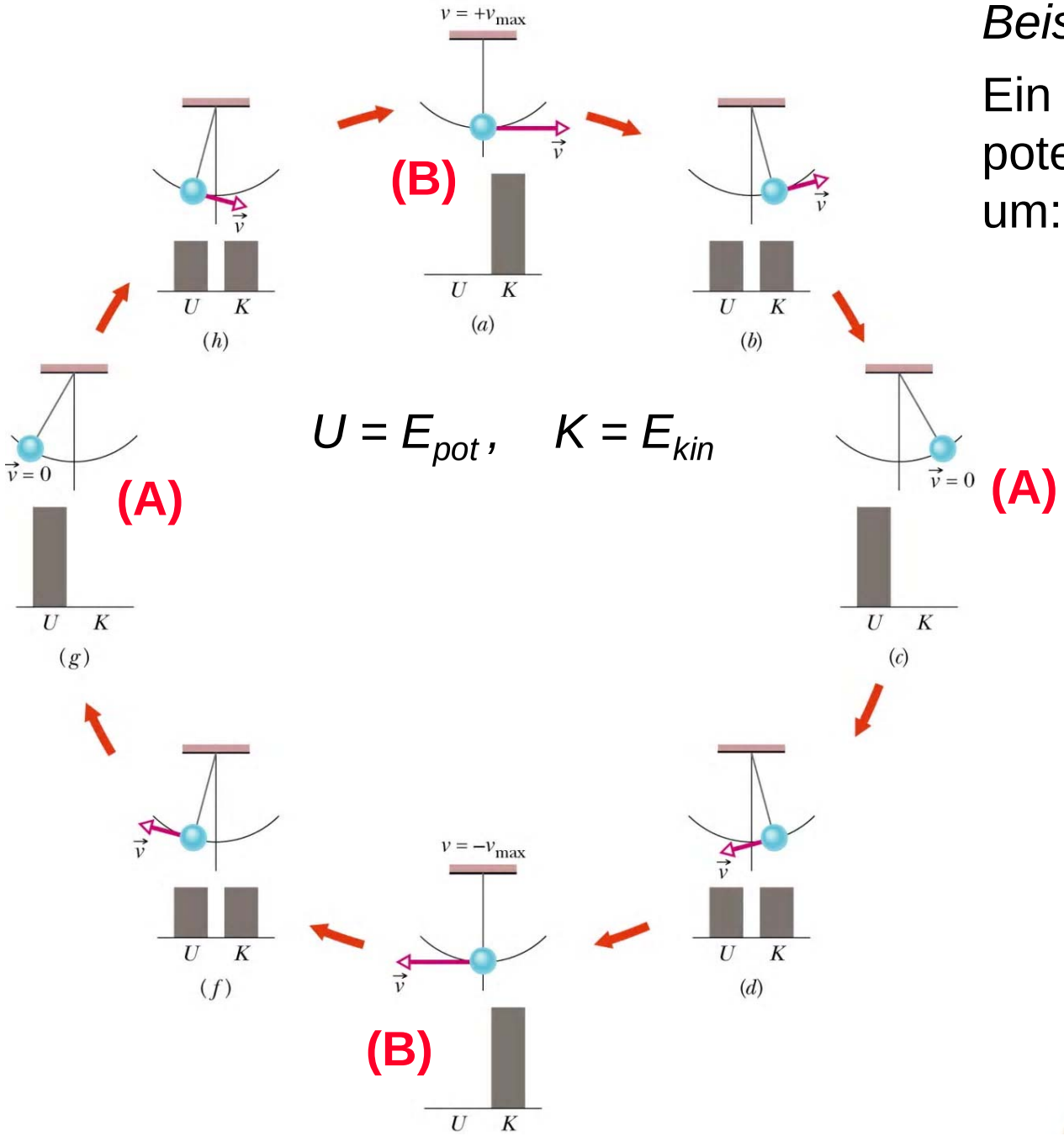
Experiment: Wilberforce-Pendel

*(genau genommen muss auch die
Torsion / Verdrehung der Feder
bzw. die Torsionsenergie berücksichtigt werden)*

Experiment:

Galilei-Pendel (asymm. Fadenpendel)

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung: Beispiele



Beispiel für die Energieerhaltung:

Ein **Fadenpendel** wandelt periodisch potenzielle Energie in kinetische Energie um:

$$E_A = E_B$$

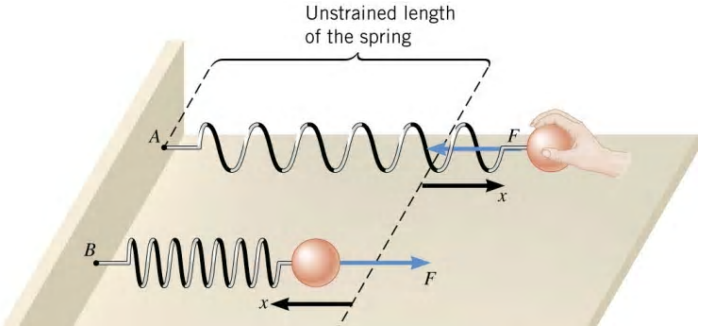
$$E_{kin,A} + E_{pot,A} = E_{kin,B} + E_{pot,B}$$

$$0 \quad + m g h_0 = \tfrac{1}{2} m v^2 + 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2 g h_0}$$

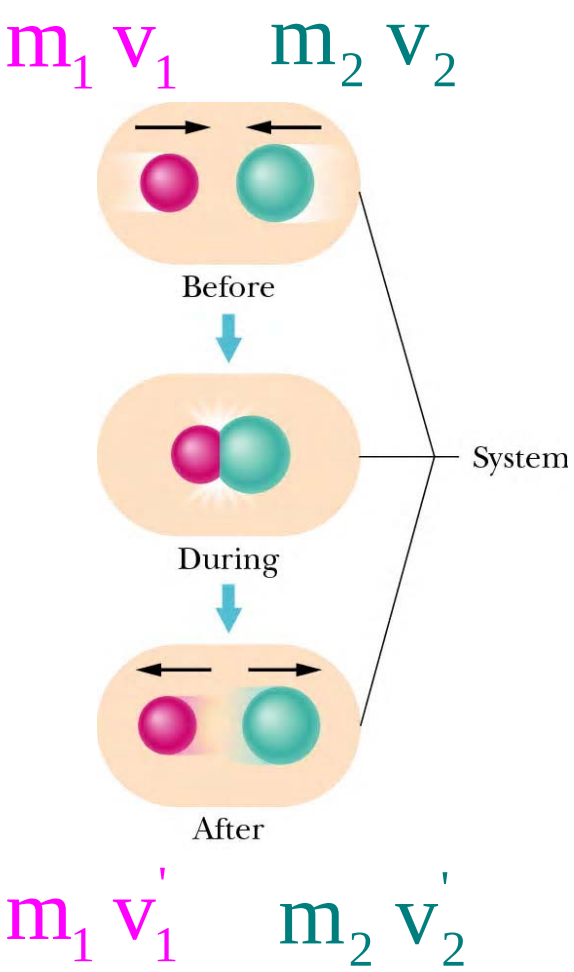
äquivalent:

horizontales Federpendel



2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung: Stoß

Kombination von Impuls- und Energiesatz: Stoß zwischen 2 Körpern



2 Möglichkeiten:

a) elastischer Stoß: E_{kin} bleibt erhalten,

d.h. keine Verformungsarbeit, keine Wärme

b) inelastischer Stoß:

E_{kin} geht in Verformungsarbeit oder Wärme über

In beiden Fällen gilt der Impuls-Satz:

$$p_{ges} = m_1\ v_1 + m_2\ v_2 = \text{const}$$

Nur im Fall (a) gilt der Energiesatz der Mechanik:

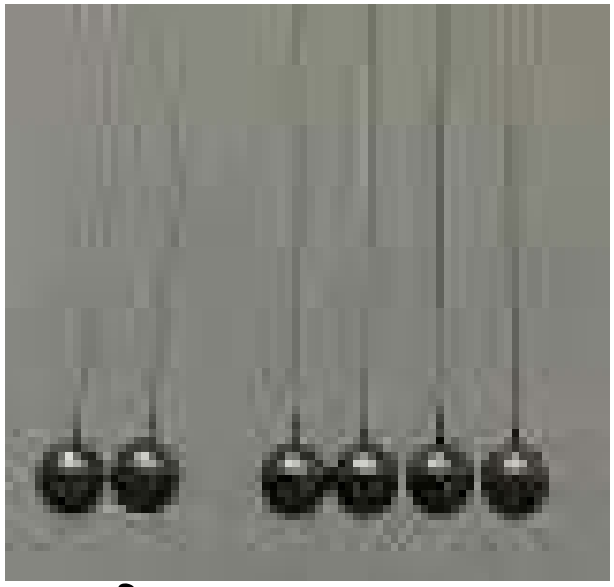
a) $E_{kin} + E_{pot} = \text{const}$,

b) $E_{kin} + E_{pot} + W_{form} + Q + \ldots = \text{const}$

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung: Stoß

Elastischer Stoß

Wie viele Kugeln (n) fliegen rechts weg, wenn links 2 ausgelenkt werden ?



Antwort:

$v_2 = \frac{2v_1}{n}$

Impuls-Satz: $2m \cdot v_1 = nm \cdot v_2 \quad \Rightarrow v_1 = nv_2 / 2$

Energie-Satz: $\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot nm \cdot v_2^2 \quad \Rightarrow v_1^2 = nv_2^2 / 2$

$$\left(\frac{mv_2}{2}\right)^2 = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 v_2^2}{4} = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_1^2 = \left(\frac{nv_2}{2}\right)^2 = nv_2^2 / 2 \Rightarrow n = 2$$

$\Rightarrow n = 2$

Zum Nachdenken:

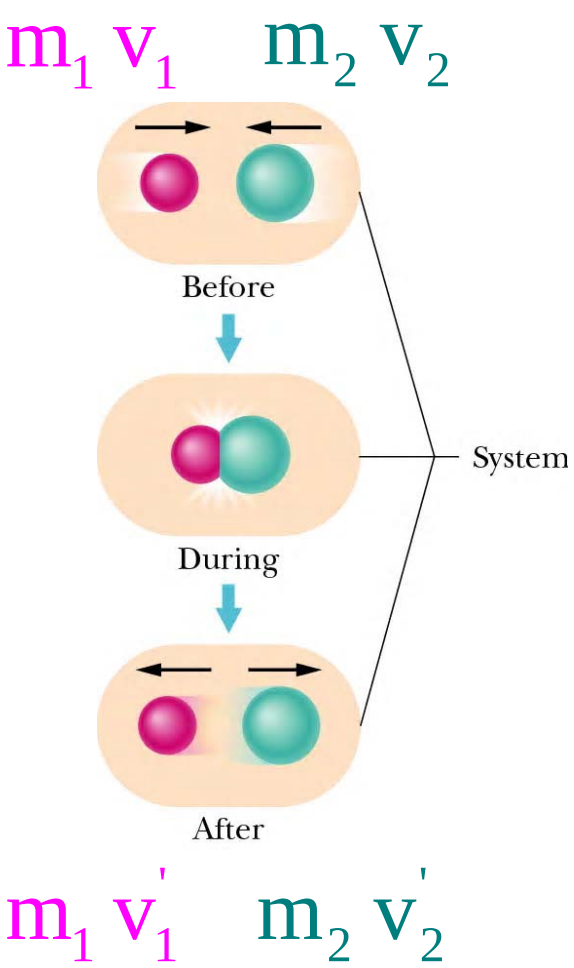
1) Wie viel Zeit zwischen Auftreffen der Kugeln links und Wegfliegen der Kugeln rechts ?
(Energie im Festkörper läuft mit Schallgeschwindigkeit)

2) Wo ist die Energie in der Zwischenzeit ? (elastische Verformungsenergie)

3) Welcher fundamentalen Energie entspricht das ? (potenzielle Energie der chemischen Bindung (elektrostatisch) + kinetische Energie der Festkörperatome)

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung: Stoß

Elastischer Stoß zwischen 2 Körpern (hier: zentraler Stoß, eindimensional)



Impuls-Satz: $$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

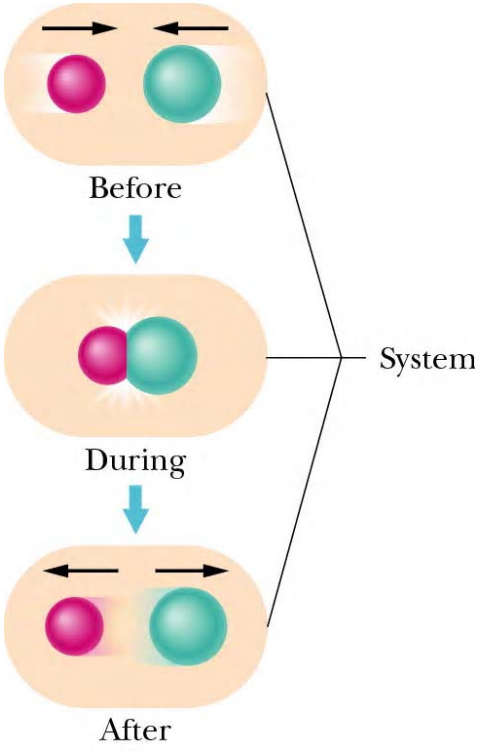
Energie-Satz: $$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (v_2')^2$$

$$\boxed{v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}}$$

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung: Stoß

Elastischer (zentraler, eindimensionaler) Stoß zwischen 2 Körpern

$m_1\ v_1 \qquad m_2\ v_2$

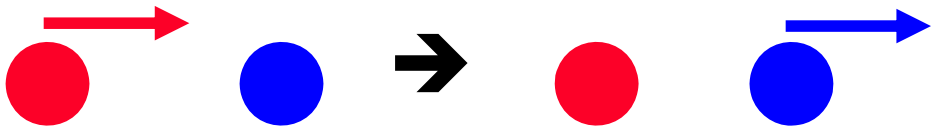


$m_1\ v_1' \qquad m_2\ v_2'$

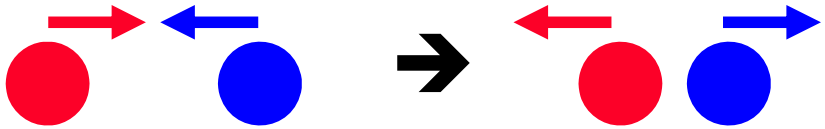
$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Beispiele:

1) $m_1 = m_2$; $v_2 = 0$ ➔ $v_1' = 0$, $v_2' = v_1$



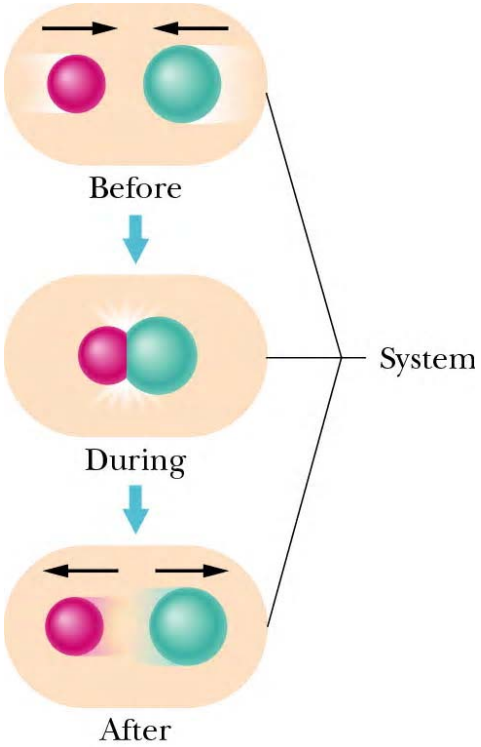
2) $m_1 = m_2$; $v_1 = -v_2$ ➔ $v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$



2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung: Stoß

Elastischer (zentraler, eindimensionaler) Stoß zwischen 2 Körpern

$m_1\ v_1 \qquad m_2\ v_2$



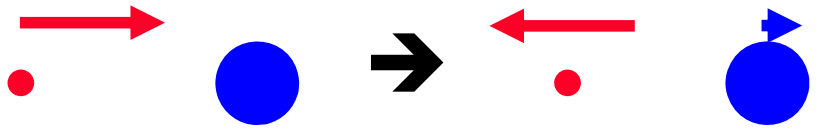
$m_1\ v_1' \qquad m_2\ v_2'$

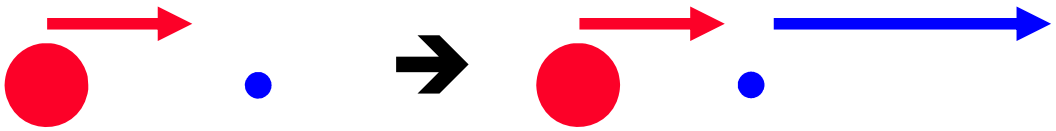
$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Beispiele:

3) $m_1 \ll m_2$; $v_2 = 0$ ➔ $v_1' \sim -v_1$ (Reflexion); $v_2' \sim 2m_1 v_1 / m_2$

maximaler Impulsübertrag von m_1 auf m_2, aber kaum Energieübertrag



4) $m_1 \gg m_2$; $v_2 = 0$ ➔ $v_1' \sim v_1$, $v_2' \sim 2v_1$

geringer Impuls- und Energieübertrag von m_1 auf m_2