2. Mechanik starrer Körper: 2.2 Dynamik

Dynamik: Einfluss von Masse und Kraft auf die Bewegung

Inhalt:

2.2.1 Kräfte

2.2.2 Impuls

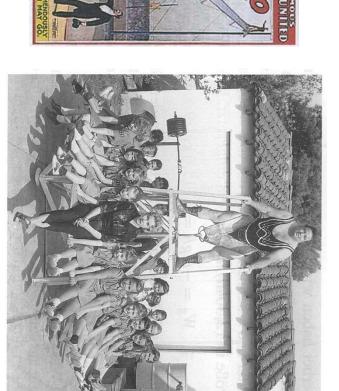
2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

2.2.4 Schwingungen

2.2.5 Rotation





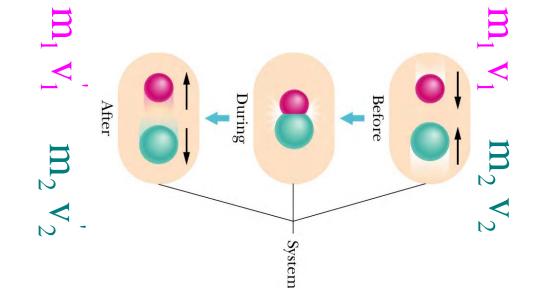




Fachtutorium

```
27.01. (Di),
28.01. (Mi),
02.02. (Mo), 10:00-11:30 Chemie, Seminarraum B 03.02 (Di), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum
                                                                                                                                                                                                                 19.01. (Mo), 10:00-11:30 Chemie, Seminarraum B 20.01. (Di), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          08.12. (Mo), 10:00-11:30 Chemie, Seminarraum B 09.12. (Di), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  02.12. (Di), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum 03.12. (Mi), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           24.11. (Mo), 10:00-11:30 Chemie, Seminarraum B 25.11. (Di), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  10.11. (Mo), 10:00-11:30 Chemie, Seminarraum B 11.11. (Di), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            04.11. (Di), 13:00-14:30
05.11. (Mi), 13:00-14:30
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             13.01. (Di), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum 14.01. (Mi), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       18.11. (Di), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum 19.11. (Mi), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     07.01. (Mi), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            17.12. (Mi), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    16.12. (Di), 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum
                                                                                                          13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum 13:00-14:30 Hörsaal Biozentrum
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                Hörsaal Biozentrum
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    Hörsaal Biozentrum
```

Kombination von Impuls- und Energiesatz: Stoß zwischen 2 Körpern



- 2 Möglichkeiten:
- a) elastischer Stoß: Ekin bleibt erhalten,

d.h. keine Verformungsarbeit, keine Wärme

b) inelastischer Stoß:

Ekin geht in Verformungsarbeit oder Wärme über

In beiden Fällen gilt der Impuls-Satz:

$$p_{\rm ges} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = const$$

Nur im Fall (a) gilt der Energiesatz der Mechanik:

a)
$$E_{kin} + E_{pot} = const$$
,

b)
$$E_{kin} + E_{pot} + W_{form} + Q + ... = const$$

Elastischer Stoß

wenn links 2 ausgelenkt werden? Wie viele Kugeln (n) fliegen rechts weg,

Antwort:

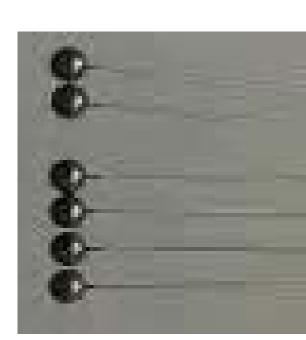
$$2\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{n} \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_2$$

$$\Rightarrow$$
 $V_1 = nV_2 / 2$

Energie-Satz:
$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \text{m} \cdot \text{v}_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \text{nm} \cdot \text{v}_2^2 \implies \text{v}_1^2 = \text{nv}_2^2 / 2$$

 $\Rightarrow v_1^2 = \left(\frac{nv_2}{2}\right)^2 = nv_2^2/2 \Rightarrow n = 2$

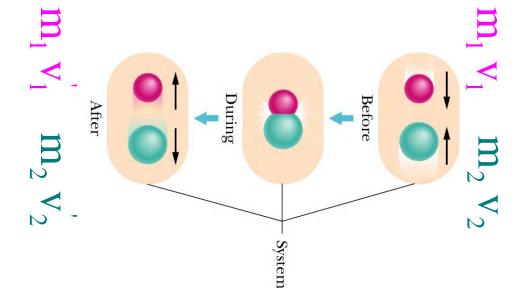
$$\Rightarrow \mathbf{v}_1^2 = \mathbf{n}\mathbf{v}_2^2 / 2$$



Zum Nachdenken:

- 1) Wie viel Zeit zwischen Auftreffen der Kugeln links und Wegfliegen der Kugeln rechts? (Energie im Festkörper läuft mit Schallgeschwindigkeit)
- 2) Wo ist die Energie in der Zwischenzeit? (elastische Verformungsenergie)
- 3) Welcher fundamentalen Energie entspricht das ? (potenzielle Energie der chemischen Bindung (elektrostatisch) + kinetische Energie der Festkörperatome)

Elastischer Stoß zwischen 2 Körpern (hier: zentraler Stoß, eindimensional)

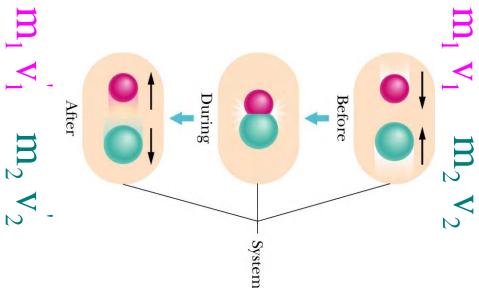


Impuls-Satz: $m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$

Energie-Satz: $\frac{1}{2} \mathbf{m}_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} \mathbf{m}_2 \mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2} \mathbf{m}_1 (\mathbf{v}_1)^2 + \frac{1}{2} \mathbf{m}_2 (\mathbf{v}_2)^2$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$
 $v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$

Elastischer (zentraler, eindimensionaler) Stoß zwischen 2 Körpern



$$v_{1} = \frac{(m_{1} - m_{2})v_{1} + 2m_{2}v_{2}}{m_{1} + m_{2}} \qquad v_{2} = \frac{(m_{2} - 1)v_{1}}{m_{2} + m_{2}}$$

$$\mathbf{v}_{2} = \frac{(\mathbf{m}_{2} - \mathbf{m}_{1})\mathbf{v}_{2} + 2\mathbf{m}_{1}\mathbf{v}_{1}}{\mathbf{m}_{1} + \mathbf{m}_{2}}$$

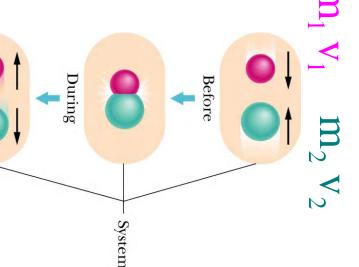
Beispiele:

1)
$$m_1=m_2$$
; $v_2=0 \rightarrow v_1'=0$, $v_2'=v_1$

2)
$$m_1=m_2$$
; $V_1=-V_2 \rightarrow V_1$, V_2 , V_2 , V_2

$$\sqrt{1 - \sqrt{2}}$$
 $\sqrt{1 - \sqrt{2}}$ $\sqrt{2} - \sqrt{1}$

Elastischer (zentraler, eindimensionaler) Stoß zwischen 2 Körpern



$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{v}_{2} = \frac{(\mathbf{m}_{2} - \mathbf{m}_{1})\mathbf{v}_{2} + 2\mathbf{m}_{1}\mathbf{v}_{1}}{\mathbf{m}_{1} + \mathbf{m}_{2}}$$

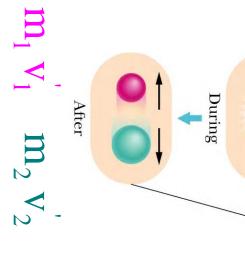
Beispiele:





3) $m_1 << m_2$; $v_2 = 0$ \rightarrow $v_1' \sim -v_1$ (Reflexion); $v_2' \sim 2m_1v_1/m_2$

 $maximaler\ Impuls\tilde{u}bertrag\ von\ m_1\ auf\ m_2$, aber $kaum\ Energie\tilde{u}bertrag$





4) $m_1 > m_2$; $V_2 = 0$ \rightarrow $V_1' \sim V_1$, $V_2' \sim 2V_1$



geringer Impuls- und Energieübertrag von m₁ auf m₂







2.2.2 (8)

Völlig inelastischer Stoß zwischen 2 Körpern (hier: eindimensional)



$$V_2 = 0$$

Impuls-Satz:
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_1$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2} \mathbf{v}_1$$



(Erzeugung von Wärme bzw. von Verformungen)

$$(m_1 + m_2)v'$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)\mathbf{v}'$$

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}'$$

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_{kin}^{vor} - \mathbf{E}_{kin}^{nach} = \frac{1}{2} \mathbf{m}_1 \mathbf{v}_1^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) (\mathbf{v}')^2$$

$$=\frac{1}{2}m_{1}V_{1}^{2}\cdot(\frac{m_{2}}{m_{1}+m_{2}})>0 =\frac{1}{2}m_{1}V_{1}-\frac{1}{2}\frac{(m_{1}+m_{2})}{(m_{1}+m_{2})^{2}}m_{1}\cdot V_{1}$$

Bsp.:

für
$$m_1 = m_2$$
:

$$\Delta E = E_{kin}^{vor}/2$$

$$\Delta E pprox E_{kin}^{vor}$$







(fast gesamte Energie umgewandelt)

Bsp. Inelastischer Stoß: ballistisches Fadenpendel

Verformungsarbeit und Wärmeenergie: Umwandlung von kinetischer Energie in potenzielle Energie, aber auch in

ausschlägt? wenn der Holzklotz (M=1kg) um die Höhe h=5cm Wie schnell war das Projektil der Masse m=10g,

- Impuls-Satz: mv = (m+M)v^{*}
- 2) Restenergie: $\frac{1}{2}$ (m+M)v² = (m+M)gh

Vorsicht: ½ m v² ≠ (m+M)gh wegen Verformungsarbeit & Wärme

$$v = \frac{m+M}{m} \cdot \sqrt{2gh}$$

N

 $\uparrow h$

verrichtet wurde Die Leistung P gibt an, in welcher Zeit ∆t die Arbeit ∆W von der Kraft F

Durchschnittswert (Mittelwert) im Intervall ∆t

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(Momentane) Leistung: lim
$$\Delta t \rightarrow 0$$
 $P = \frac{dW}{dt}$

$$P = \frac{d(F \cdot s)}{ds} = F \cdot v$$

Einheit:

Arbeit:
$$1 \text{ kW h} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Beispiel: Treppen steigen (2. OG, 6m) mit konstanter Steig-Geschwindigkeit v:

$$m = 70 \text{ kg}, h = 6 \text{ m} \rightarrow W = m \text{ g h} \sim 4200 \text{ J}$$

1) in
$$t_1 = 8 \text{ s} \rightarrow P_1 = W/t_1 = 525 \text{ W}$$

oder:
$$F = mg \sim 700 \text{ N}$$
, $v = h/t_1 = 0.75 \text{ m/s} \rightarrow P_1 = F v = 525 W$

2) in
$$t_2 = 20 \text{ s} \rightarrow P_2 = W/t_2 = 210 \text{ W}$$

verrichtet wurde Die Leistung P gibt an, in welcher Zeit ∆t die Arbeit ∆W von der Kraft F

Durchschnittswert (Mittelwert) im Intervall ∆t

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

[P] = J/s = Watt

 $= Nm/s = kg m^2 / s^3$

Einheit:

Medizinische Leistungsmessung: Fahrrad-Ergometer

Typische menschliche Leistungen:

70 W - Schlafen (Glühbirne)

Arbeit: $1 \text{ kW h} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$

→ 1000 kcal ~ 1.2 kW h

1 kcal = 4186.8 J

1 PS ~ 735,5 W (75kg, 1m,1s)

200 W Dauerleistung, z.B. Radfahren bergauf

0.5 – 1 kW - nur kurzzeitig (Fön, Toaster)

100 – 200 W - Nahrungsenergieverbrauch / Stunde (100 W * 24h * 3600 s/h ~ 9 106 J ~ 2150 kcal) für mech. Arbeit, Körperwärme, Organfunktion

Nahrungsenergie: Zerlegung der Nahrung in einfachere Moleküle, freiwerdende Bindungsenergie; Kohlehydrate: 17 kJ / g; Fett: 39 kJ / g; ▶ 500 g/Tag Kohlehydrate

Einpersonenhaushalt: Stromverbrauch/ Jahr ~ 1000 kW h ~ 4 10º J

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung: Zusammenfassung

Energie ist gespeicherte Arbeit.

$$W = | \dot{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

Für ortsunabh. Kraft & geradlinigen Weg: $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = F \cdot \Delta s \cdot \cos(\theta)$

$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{S} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{S} \cdot \cos(\theta)$$

Kinetische Energie:
$$E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2$$

Potenzielle Energie:
$$E_{pot} = mgh$$

Pot. Energie einer Feder:
$$E_{pot} = \frac{1}{2}Dx^2$$

ist eine

Erhaltungsgröße.

mechanischen Energie in andere Energieformen (Wärme) umgewandelt. Impuls- und Energieerhaltung. Beim inelastischen Stoß wird ein Teil der Beschreibung von elastischem und inelastischem Stoß durch Kombination von

Leistung ist Arbeit pro Zeit
$$P = \frac{dW}{dt}$$

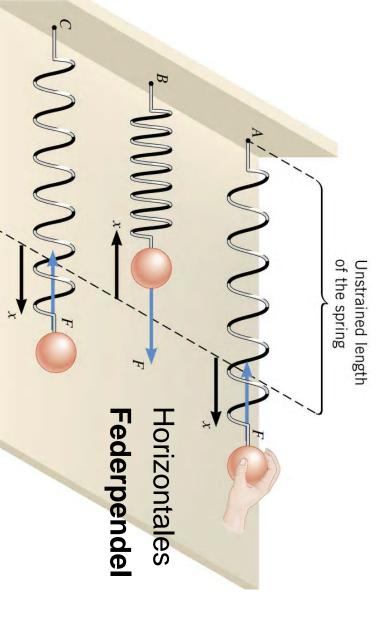
Für konstante Kraft:
$$P = \frac{d(F \cdot s)}{dt} = F \cdot v$$

Schwingungen Bsp.: Schall, Licht, Wärme, Materie

Zeitlich periodische Umwandlung verschiedener Energieformen.

Charakteristisch für jedes schwingungsfähige System:

- rücktreibende Komponente (Feder) +
- träge Komponente (Masse)



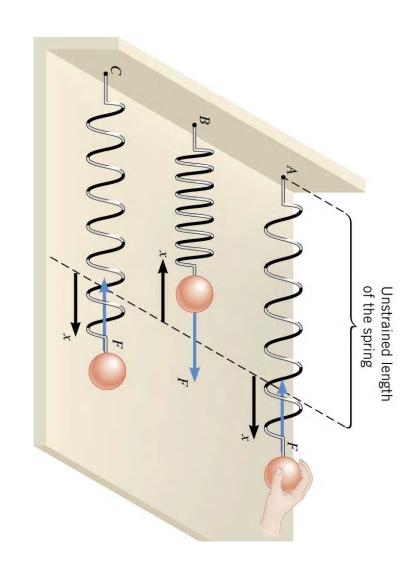
Ohne Dämpfung schwingt das System (der Oszillator) mit der typischen **Eigenfrequenz** ω für alle Zeit.

Horizontales Federpendel: Modellsystem für harmonischen Oszillator

Harm. Osz.: Kraft prop. Auslenkung

F(t) =
$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}(t) = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}(t)$$

oder: $\mathbf{E}_{pot}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}^{2}(t)$

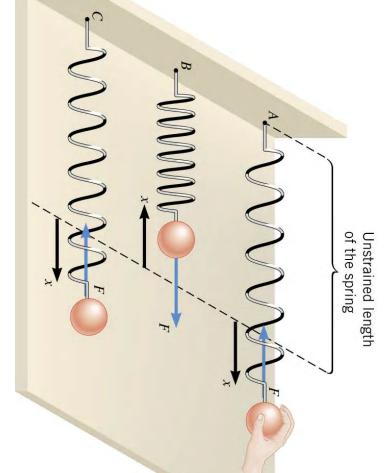


Horizontales Federpendel: Modellsystem für harmonischen Oszillator

Horizontales Federpendel: Modellsystem für harmonischen Oszillator

<u> Harm. Osz.: Kraft prop. Auslenkung</u>

$$F(t) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}(t) = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}(t)$$
oder: $\mathbf{E}_{pot}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}^2(t)$



lineare Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung Bewegungsgleichung (2. Newton'sches Axiom) ist

$$\Rightarrow a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m}x(t)$$

$$f(t) = \sin(t) \Rightarrow f'(t) = \cos(t) \Rightarrow f''(t) = -\sin(t)$$

Lösung der DGL: hier x"(t)=- ω^2 x(t)

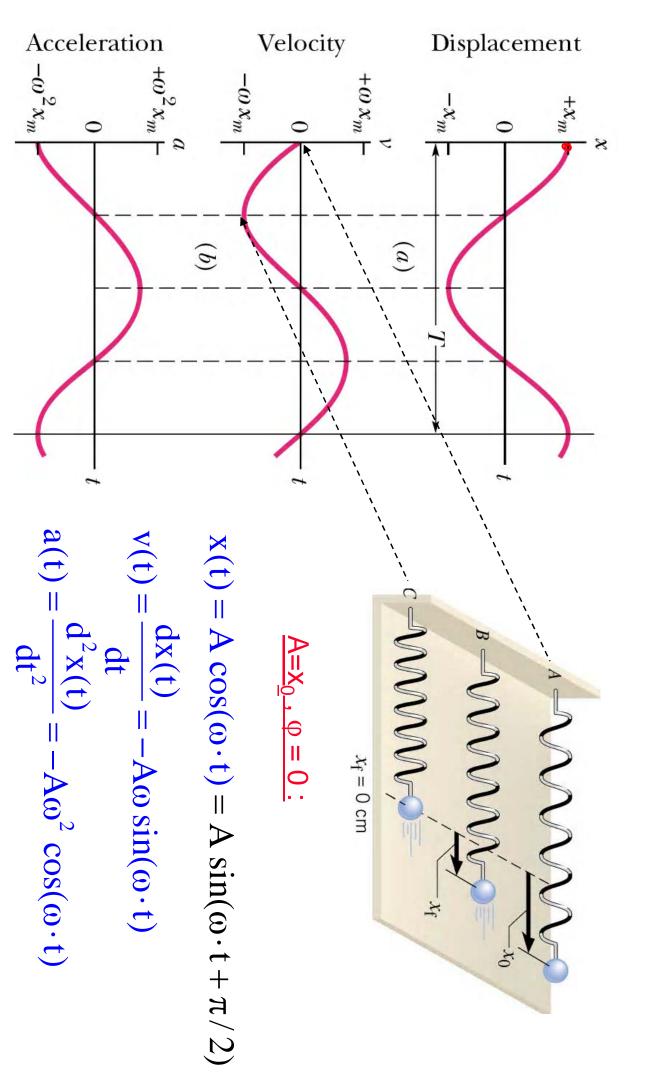
$$x(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

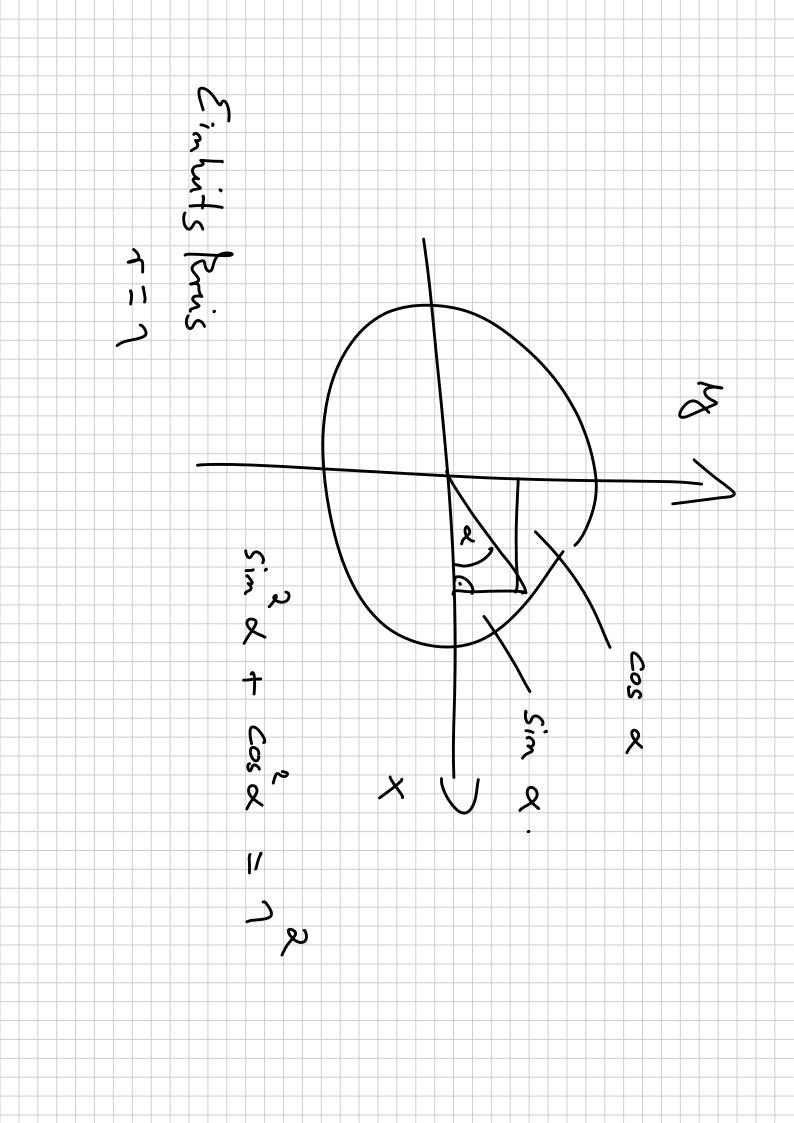
 $\omega = \sqrt{D/m}$

ω unabh. von A und φ!

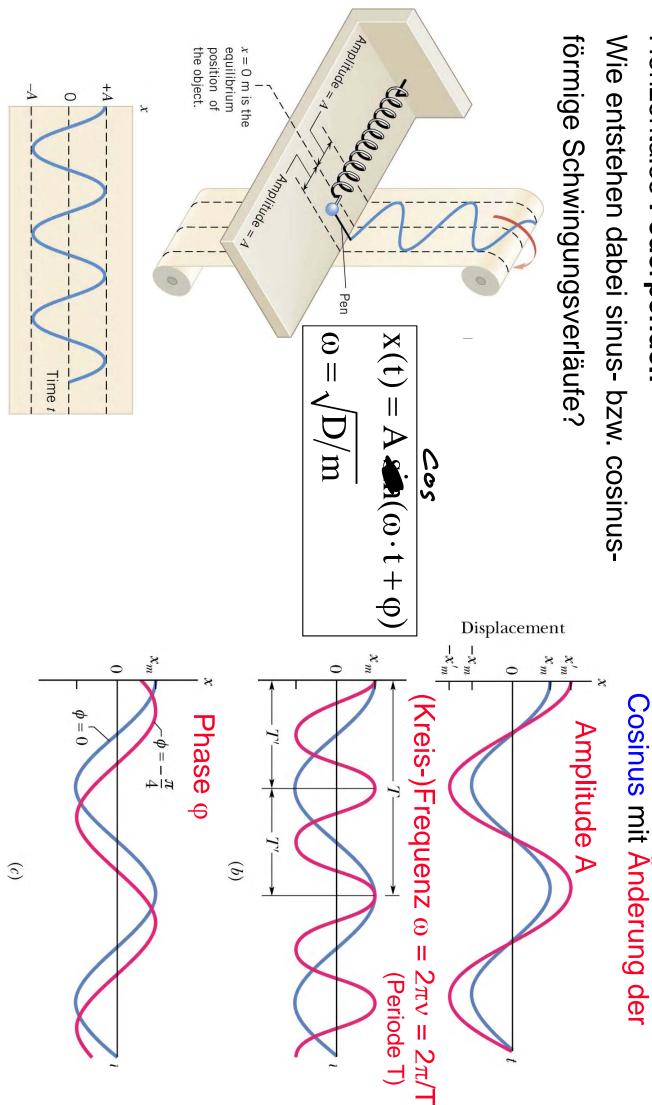
A: Amplitude **** *Anfangs-* φ: Phase **** *bedingungen*

$$E_{kin} + E_{pot} = const$$





Horizontales Federpendel:



Wie entstehen dabei sinus- bzw. cosinus-förmige Schwingungsverläufe?

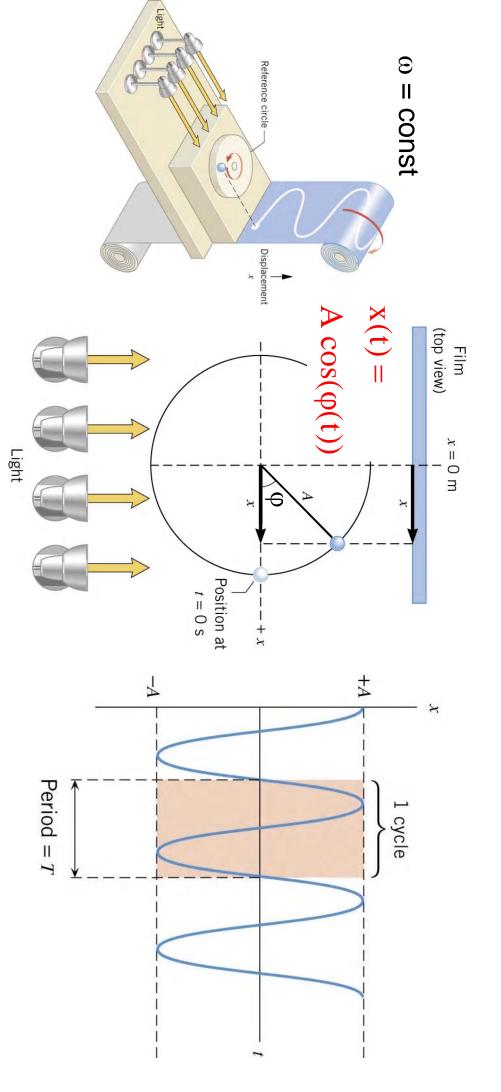
Die Bewegung entspricht dem

Schattenwurf einer

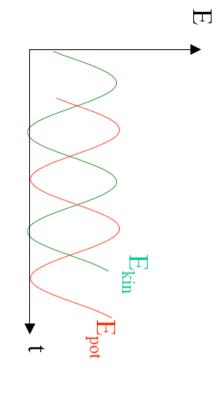
gleichförmigen Kreisbewegung!

 $x(t) = A \cos(\omega \cdot t) = A \sin(\omega \cdot t + \pi/2)$

 $\omega = const$ $\varphi(t) = \omega \cdot t$ Phase: keine Einheit



Energieerhaltung: zeitabhängige kinetische und potentielle Energie

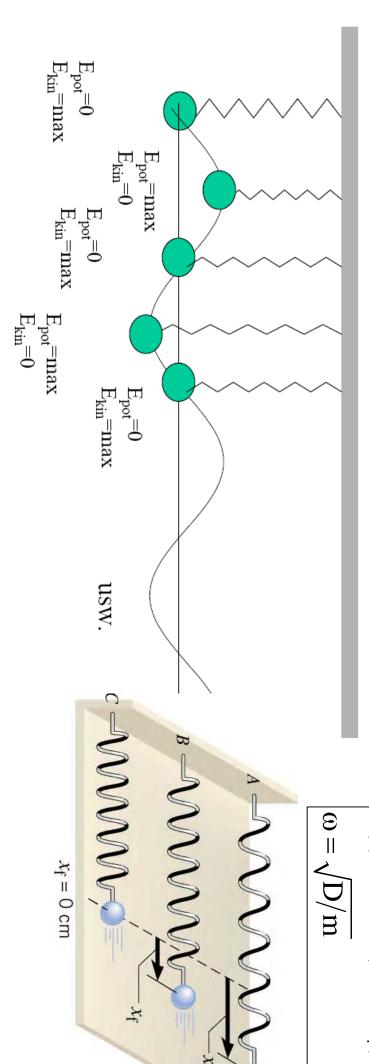


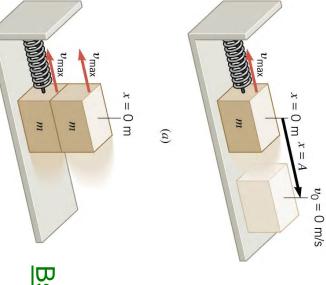
$$E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}Dx(t)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^{2}A^{2}\cos(\omega t + \varphi)^{2} + \frac{1}{2}DA^{2}\sin(\omega t + \varphi)^{2}$$
$$= \frac{1}{2}DA^{2}[\cos(\omega t + \varphi)^{2} + \sin(\omega t + \varphi)^{2}] = \frac{1}{2}DA^{2}$$

$$= \frac{1}{2}DA^{2}[\cos(\omega t + \varphi)^{2} + \sin(\omega t + \varphi)^{2}] = \frac{1}{2}DA^{2}$$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)}$$





Anwendung:

Masse? Wie kontrollieren Astronauten in der Schwerelosigkeit ihre

- → "Body Mass Measurement Device"
- Oszillierender Stuhl mit Feder
- m_{Gesamt} = m_{Stuhl} + m_{Astronaut}
- Messung der Kreisfrequenz ω

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_{\rm ges}}}$$

<u>Bsp:</u> Der Stuhl (10kg) alleine schwingt mit v=1Hz, mit T. Jernigan aber mit v'=0.4Hz. Wie schwer ist (wieviel Masse hat) Tamara ?



$$\Rightarrow \frac{100}{16} = \frac{10kg + m_{Astro}}{10kg}$$
$$\Rightarrow m_{Astro} = [1000/16 - 10]kg = 52.5kg$$

 $\sqrt{m_{Stuhl} + m_{Astro}}$

 (ω_{mit})

 m_{Stuhl}

 m_{Stuhl}

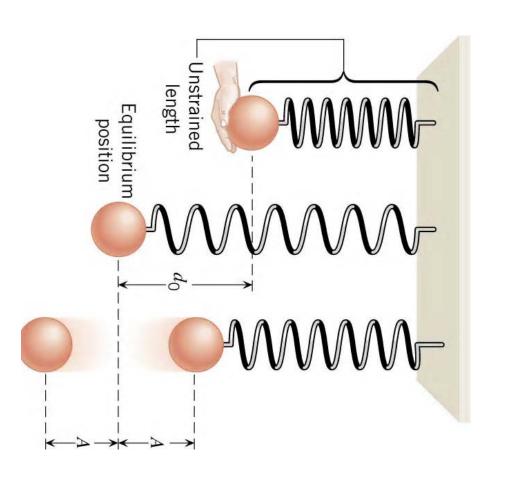
 \mathscr{Q}_0

 $m_{Stuhl} + m_{Astro}$

Einfluss der Gravitationskraft

Frage: Was ändert sich, wenn die Feder senkrecht hängt statt waagerecht liegt?

(beides reibungsfrei)



Antwort:

Es gibt einen Zusatzterm in der DGL, der jedoch nur die statische Auslenkung durch die Gewichtskraft beschreibt.

$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x(t) - g = -\frac{D}{m}(x(t) - d_0)$$

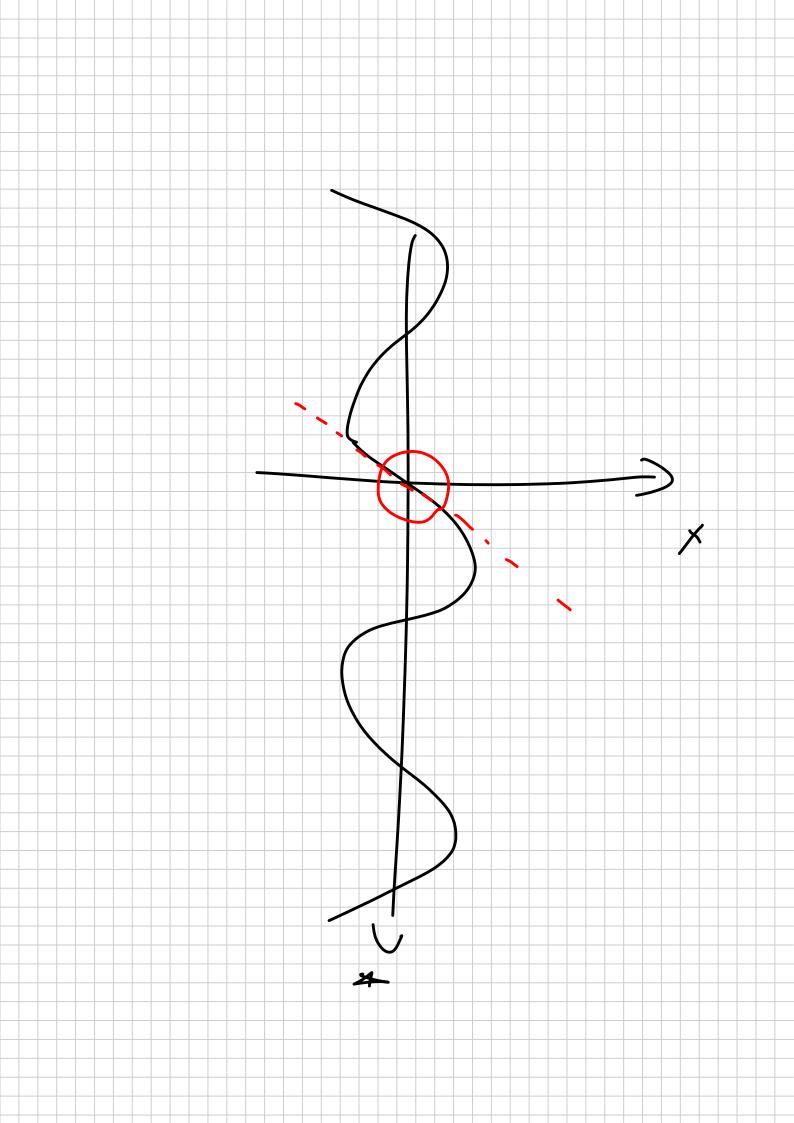
$$\Rightarrow \qquad \ddot{y}(t) = -\frac{D}{m}y(t)$$

$$d_0 = (mg)/D$$

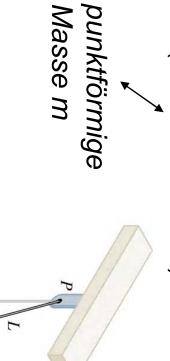
Die Frequenz wird nicht beeinflusst.

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

 $y(t) = x(t) - d_0$

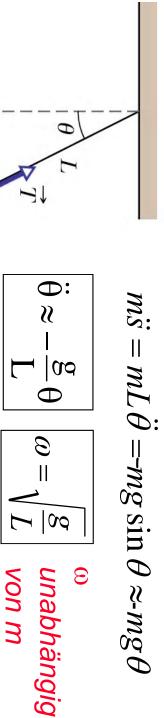


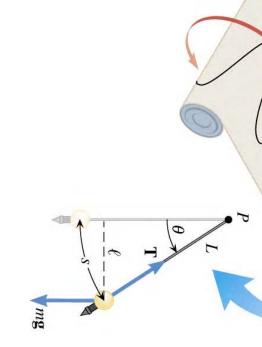
(mathematisches) **Fadenpendel:** auch ein harmonischer Oszillator ?



Pen-

- die Schwingung ist nur für kleine
 Ausschläge (θ < 15°) harmonisch!
- $\sin(15^{\circ})=0.2588$ $15^{*}\pi/180=0.2618$ $\rightarrow \sin\theta \approx \theta$
- die Schwingungsperiode ist unabhängig von der Masse (und von der Amplitude)





 $F_g \cos \theta$

S =

v=1Hz $\Leftrightarrow \omega=2\pi$ Hz=6.28Hz \Rightarrow L = g/ ω^2 ~ 25cm

Gedämpfte Schwingungen

Reibungskraft (prop. Geschwindigkeit v für kleine v):

Springiness, k

Mass m

-Vane

Rigid support

$$F_R = -r v$$
 (r = Reibungskoeff.)

$$F(t) = m \cdot \ddot{x}(t) = -D \cdot x(t) - r \cdot \dot{x}(t)$$

$$x(t) = A \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

X(t)

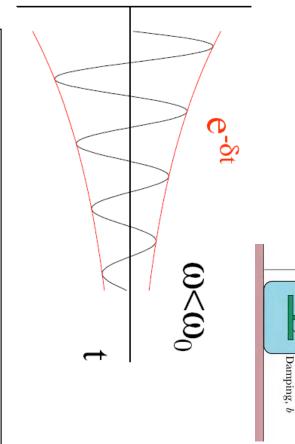
$$\omega = \sqrt{\frac{\mathbf{D}}{m}} - \delta^2$$

$$\delta = r/2m$$

Verifizieren der Lösung durch einsetzen in DGL.

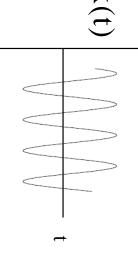
$$\omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

 ω_0 : Eigenfrequenz der freien Schwingung



Reibung führt zu **Abnahme** der **Amplitude** und der **Frequenz**.

Gedämpfte Schwingungen



8 = 0 freie Schwingung

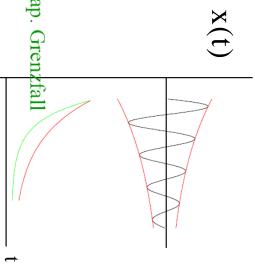
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \delta^2}$$
$$\delta = r/2m$$

 $x(t) = A \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega \cdot t + \varphi)$



 $\delta^2 \ll D/m$

schwache Dämpfung: $\omega \sim \omega_0$



 $\delta^2 = (0.1 - 0.99) D/m$

"mittlere" Dämpfung: $\omega < \omega_0$

ap. Grenzfall

 $\delta^2 = D/m \Longrightarrow \omega = 0$ Aperiodischer Grenzfall, Auslenkung wichtig für Anwendungen kehrt am schnellsten (exponentiell) zur Ruhelage zurück;

 $\delta^2 > D/m \, o \, \omega$ ist imaginär, Kriechfall, keine Oszillation

Erzwungene Schwingungen (Bsp.: Schaukel)

Durch äußere periodische Kraft F₀ cos(ω_e t)

mit beliebiger Frequenz ω_e

wird der Oszillator zu Schwingungen mit ω_e angeregt.

$$\mathbf{m} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F}_0 \cos(\omega_e \cdot \mathbf{t})$$

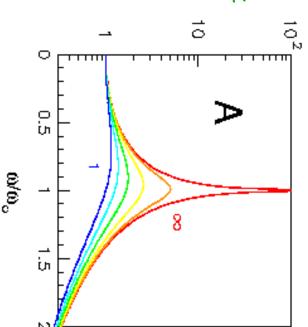
Lösung (für große t):

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi)$$

Die Schwingung mit ω_0 ist wegen der Dämpfung für große t vernachlässigbar

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\delta^2 \omega_e^2}}$$

Resonanz für $\omega_e \sim \omega_0$ (d.h. maximale Amplitude), Erregung im richtigen Takt



Resonanz-Katastrophe



2.2.4 Harmon. Schwingungen: Zusammenfassung

Horizontales Federpendel

Differentialgleichung (DGL):

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m}x(t)$$

Lösung der DGL:

$$x(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{D/m}$$

 $\omega = \sqrt{D/m}$ ω unabh. von A und φ !

Vertikales Federpendel

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -(\mathbf{D}/\mathbf{m})\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}$$

$$\omega = \sqrt{D/m}$$

Mathematisches Fadenpendel

$$\ddot{\theta}(t) \approx -\frac{g}{2}\theta(t)$$

$$\omega = \sqrt{g/L}$$
 ω unabhängig von m

 $\theta(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

Gedämpfte Schwingung

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}(t) - 2\delta \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)$$

$$x(t) = A \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$
$$\omega = \sqrt{(D/m) - \delta^2}$$

Erzwungene Schwingung

$$\mathbf{m} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F}_0 \cos(\omega_e \cdot \mathbf{t})$$
 $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{A} \cdot \cos(\omega_e \cdot \mathbf{t} + \phi)$

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi)$$