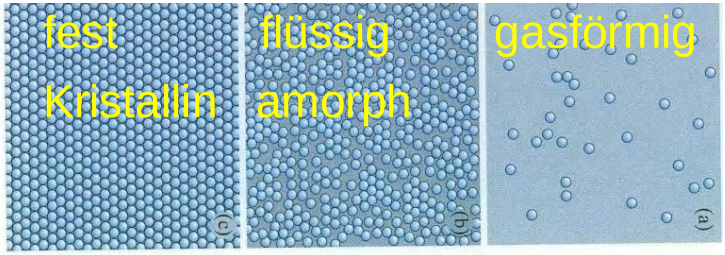
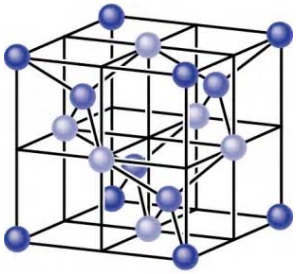
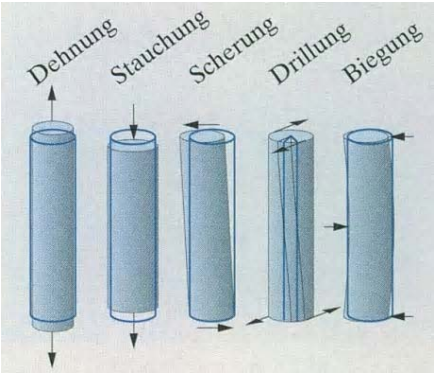
3 Mechanik deformierbarer Körper

1. **Festkörper** vs. Flüssigkeiten, Gase

   Aggregatzustände, Verformung

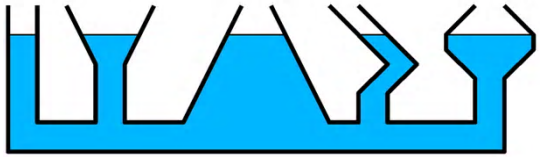


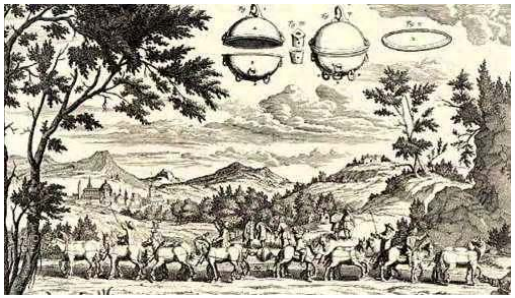


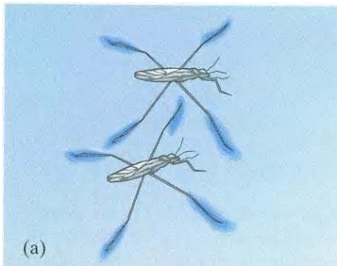


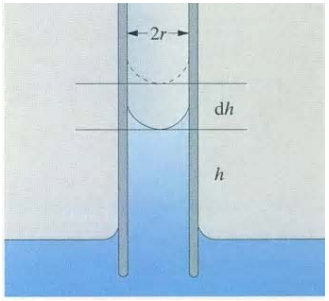
2. **Hydrostatik**

   Druck, Auftrieb, Grenzflächen/Oberflächen, Kapillarität



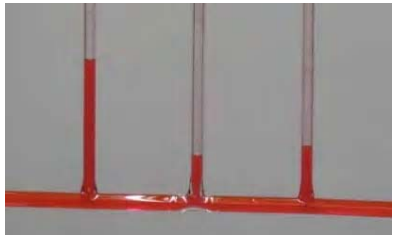


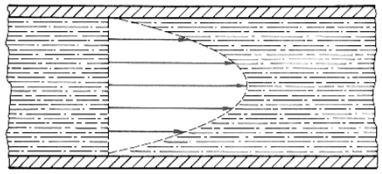




3. **Hydrodynamik**

   Strömungen, Bernoulli-Gleichung, Viskosität, Strömungswiderstand





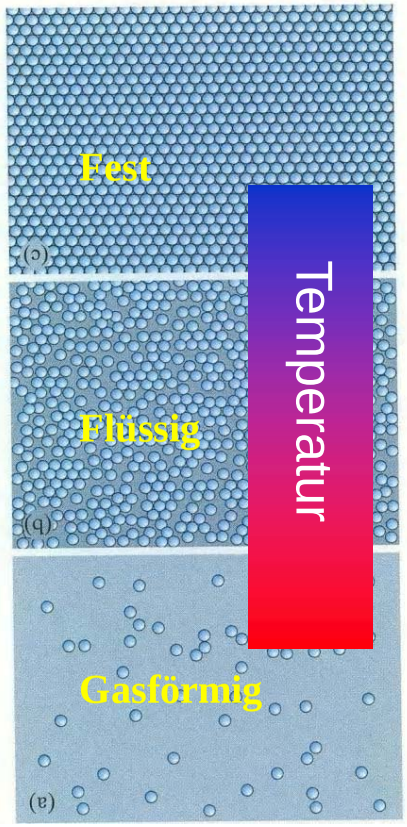
3.1 Festkörper vs. Flüssigkeiten, Gase

Aggregatzustände: (*Wechselwirkung zw. Teilchen: elektrostatisch*)

1. Festkörper: **formstabil** (bis zur Festigkeitsgrenze) und **volumenstabil**

feste Anordnung der Atome (kristallin FK: regelmäßige Anordnung = Fernordnung)

Atome sind dicht gepackt



2. Flüssigkeiten: **nicht formstabil**, aber **volumenstabil** (V~const)

Keine Fernordnung; Teilchen gegeneinander frei verschiebbar.

Teilchen dicht gepackt, Flüssigk. sind nur schwach kompressibel,

d.h. Flüssigkeiten widerstehen Kräften **senkrecht** zur Oberfläche,

aber nicht *(langsamen)* **Scherkräften** (**parallel** zur Oberfläche)

3. Gase: nicht **formstabil,** nur gering **volumenstabil**

keine Ordnung; Teilchen erfüllen den verfügbaren Raum

Abstand zw. Teilchen ist groß (➔ komprimierbar),

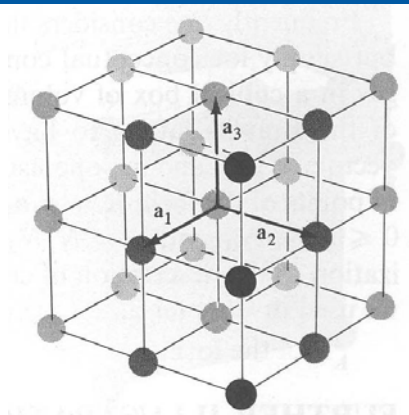
Festkörper & Flüssigkeiten: kondensierte Materie

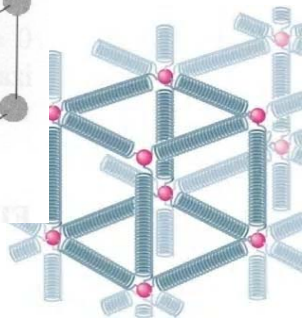
Flüssigkeiten & Gase: Fluide (Modellmedium, kontinuierlich)

3.1 Festkörper vs. Flüssigkeiten, Gase

kristalline Stoffe (*Bsp.:* Eis, Salze, Metalle)

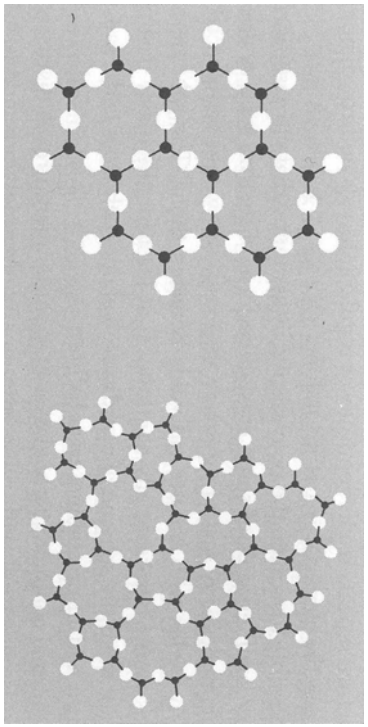
- periodische Anordnung der Atome,
  Fernordnung bzgl. Atompositionen ➔ Kristallgitter
- **anisotrop** (verschiedene Richtungen nicht äquivalent)
- Grenzen zwischen den Aggregatzuständen eindeutig





amorphe Stoffe (B*sp.:* Glas, Wachs, Pech)

- unregelmäßige Anordnung, **keine Fernordnung**
- nur Abstand zw. Nachbaratomen (Dichte) im Mittel konstant
- **isotrop** (keine Richtung ausgezeichnet)
- metastabil ?? (entstehen oft durch Abschrecken,
  d.h. Kristallisation verhindert)
- Übergang fest-flüssig ist nicht eindeutig
  (fließen, brechen bei welcher Kraft ?)



Flüssigkeiten ⇔ amorphe Festkörper: Häufigkeit der Platzwechsel

3.1 Festkörper

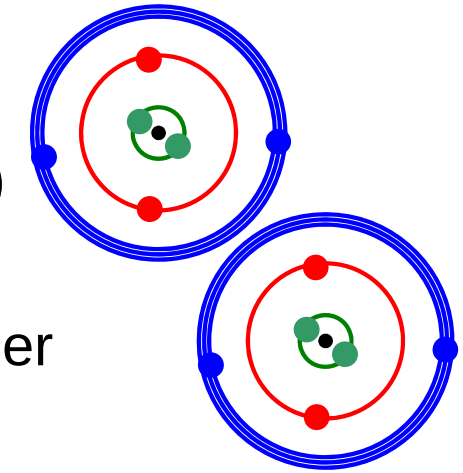
Chemische Bindung (beschrieben durch Quantenmechanik)

elektrostatische Anziehung

zw. negativen Elektronen und positiven Kernen (Ionenrümpfen)

überwiegt über die Abstoßung

zw. den Elektronen untereinander und den Kernen untereinander



Typen:

1) **Ionische Bindung** (*Bsp.:* Na^+Cl^-)

2) **Kovalente (gerichtete) Bindung** (*Bsp.:* C, Si, Ge)

Bindungselektronen gehören zu <u>beiden</u> Nachbarn

3) **Metallische Bindung** (*Bsp.:* Na, Cu)

<u>alle</u> Ionen teilen sich die Bindungselektronen (verschmiertes „Elektronengas“)

4) **van der Waals Wechselwirkung** (*Bsp.:* Edelgaskristalle, Molekülkristalle)

Anziehung zw. neutralen Atomen wg. Polarisierbarkeit (induzierte Dipole)

5) **Wasserstoffbrücken-Bindung** (*Bsp.:* Eis, DNA Doppelhelix)

ein H^+-Ion (Proton) kann an 2 Ionen gebunden sein

3.1 Festkörper

Praktisch für die Beschreibung von **homogenen Körpern** aus **vielen Teilchen** (statt Masse m und Kraft F auf ein einzelnes Teilchen):

(Massen-)Dichte $\rho = m / V$ (Masse pro Volumen; Einheit: **1 kg/m³**)

Bsp: Luft $\bar{\rho} = 0.0012$ g / cm³

Erde $\bar{\rho} = 5.5$ g / cm³

Atomkern $\rho \sim 10^{14}$ g / cm³

H_2O $\rho = 1.0$ g / cm³

Uran $\rho = 19.3$ g / cm³

1 kg/m³
= 10^{-3} g/cm³
= 1 g/l

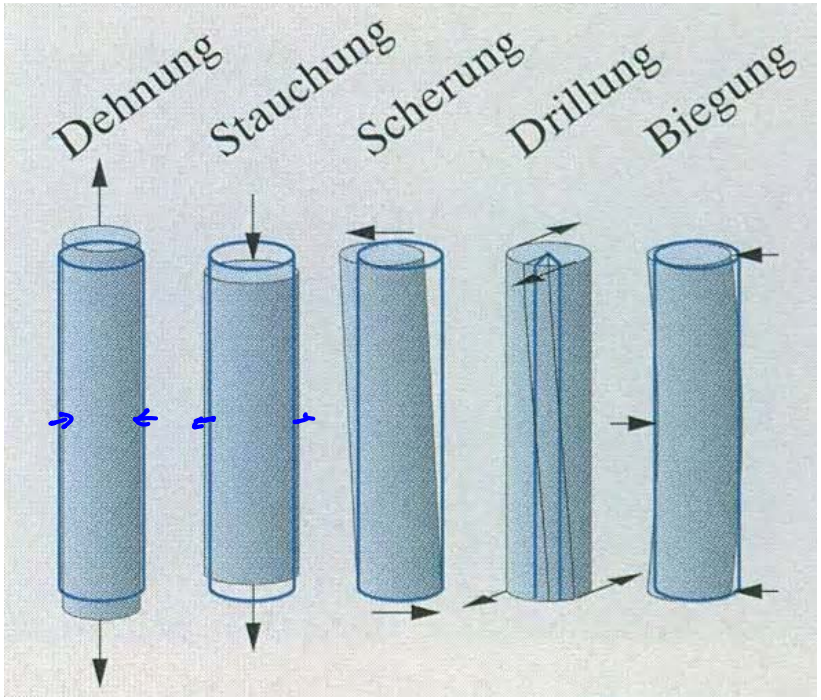
Spannung (Druck p) $\sigma = F / A$ (Kraft pro Fläche; Einheit: **1 N/m² = 1 Pa (Pascal)**)

ältere Einheiten: 1 atm = 1.013 bar = 1.013 10^5 Pa = 760 Torr = 760 mm Hg

1bar = 100.000 Pa = 1000 hPa = 10N/cm²
1kbar=0.1GPa

3.1 Festkörper

Verformung von Festkörpern durch Kräfte



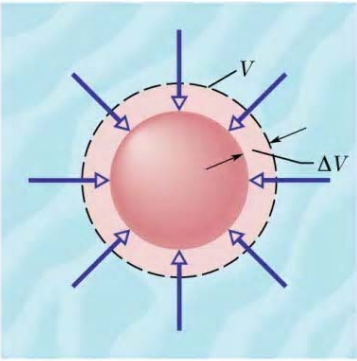
1) Formänderung <u>mit</u> Volumenänderung:

Dehnung/Stauchung, Kompression

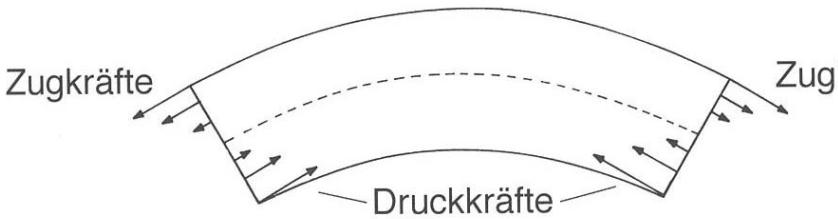
2) Formänderung <u>ohne</u> Volumenänderung:

Scherung, Drillung, Biegung

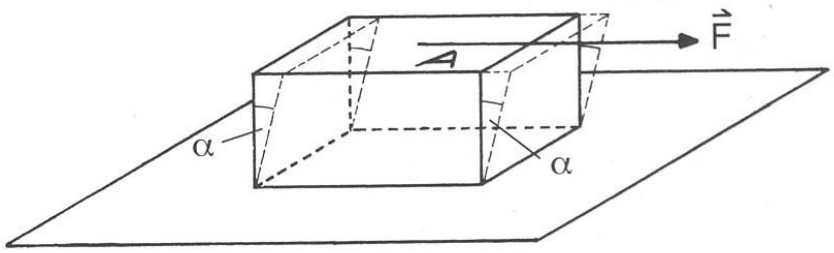
Kompression



Biegung

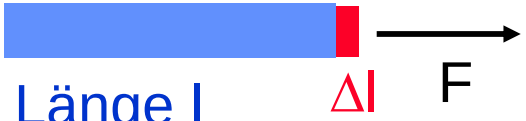


Scherung



3.1 Festkörper

1) **Dehnung/Stauchung**

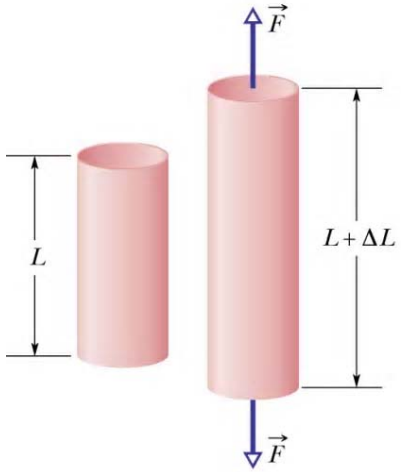


Länge l

Querschnittsfläche A

E = Elastizitätsmodul

σ = Zugspannung



$$\boxed{\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{E \cdot A}} \quad \textit{oder} \quad \boxed{\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}}$$

Einheit E: 1 N/m²

Hookesches Gesetz:

Lineare Änderung

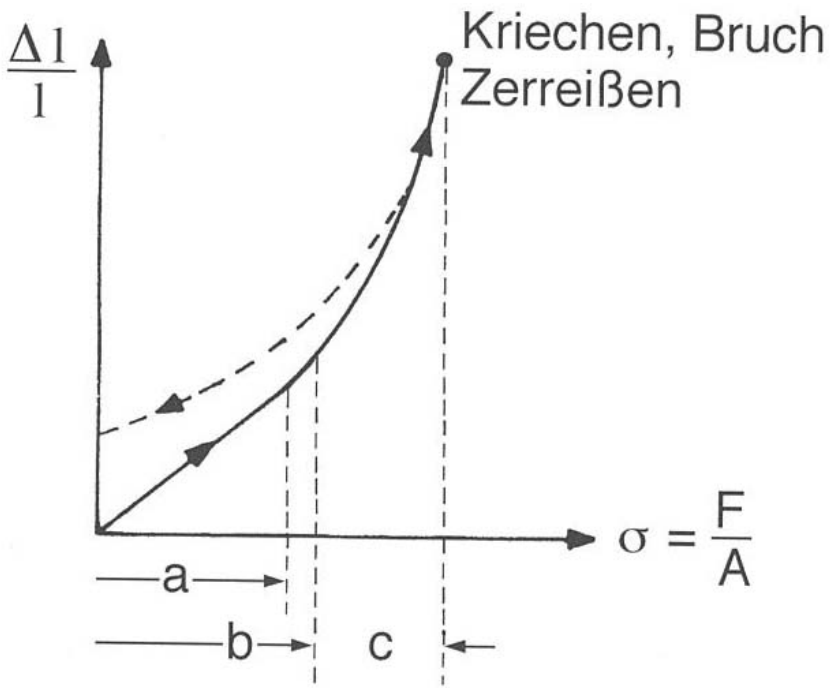
*für **kleine** Δl*

Glas, Al: $E = 7 * 10^{10}$ N/m² = 70 GPa

Stahl: $E = 10 – 20 * 10^{10}$ N/m²

Gummi: E = 0.005 GPa

allgemein:



a) linear (Hookesches Gesetz)

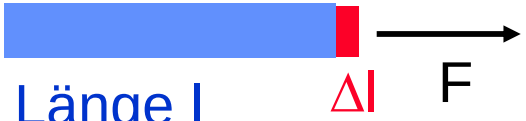
b) **elastische** Verformung (reversibel)

c) **plastische** Verformung (irreversibel)

Zerreißgrenze bei Δl/l < 1%

3.1 Festkörper

1) Dehnung/Stauchung

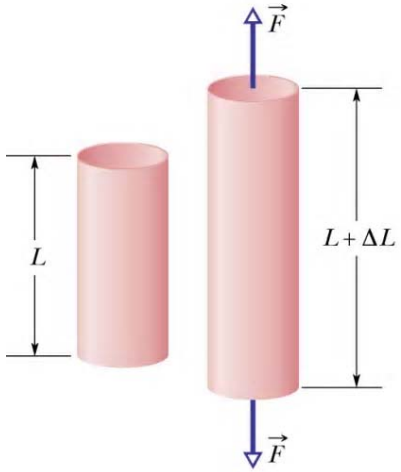


Länge l

Querschnittsfläche A

E = Elastizitätsmodul

σ = Zugspannung



$$\boxed{\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{E \cdot A}} \quad \textit{oder} \quad \boxed{\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}}$$

Einheit E: 1 N/m²

Hookesches Gesetz:

*Lineare Änderung für **kleine** Δl*

Glas, Al: $E = 7 * 10^{10}$ N/m² = 70 GPa

Stahl: $E = 10 – 20 * 10^{10}$ N/m²

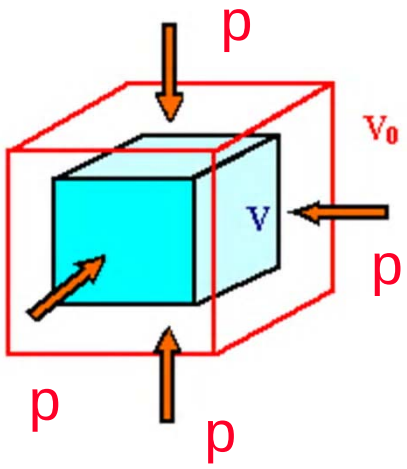
Gummi: E = 0.005 GPa

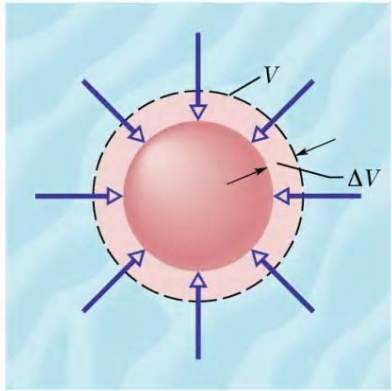
Wenn das Material ein breites elastisch reversibles Regime besitzt, ist es geeignet für „elastische Stöße“ …

3.1 Festkörper

2) **Kompression**

Bei **allseitigem** Druck verkleinert sich das Volumen.





$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K} = -\kappa p$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{E \cdot A}$$

Vergleich Dehnung/Stauchung

Al (20° C):	K ~ 7 * 10^{10} N/m² ~ E
Eis (-4°C):	K ~ 10^{10} N/m²
Wasser (20°):	K ~ 2 * 10^{9} N/m²

- *Hooke'sches Gesetz: Lineare Änderung für **kleine** ΔV*
- *Minuszeichen: Volumenverkleinerung*
- ***K = Kompressionsmodul**, Einheit 1 N/m²; κ = Kompressibilität (=1/K)*
- *oft: K~ E in Festkörpern, bzw. $\Delta V/V \sim 3\, \Delta l/l$ (im kubischen Material)*
- *bei Dehnung wird die Volumenänderung durch Querkontraktion kompensiert*
- *Gase sind kompressibel und volumenelastisch; Flüssigkeiten und Festkörper kaum*

3.1 Festkörper

3) **Scherung, Torsion**

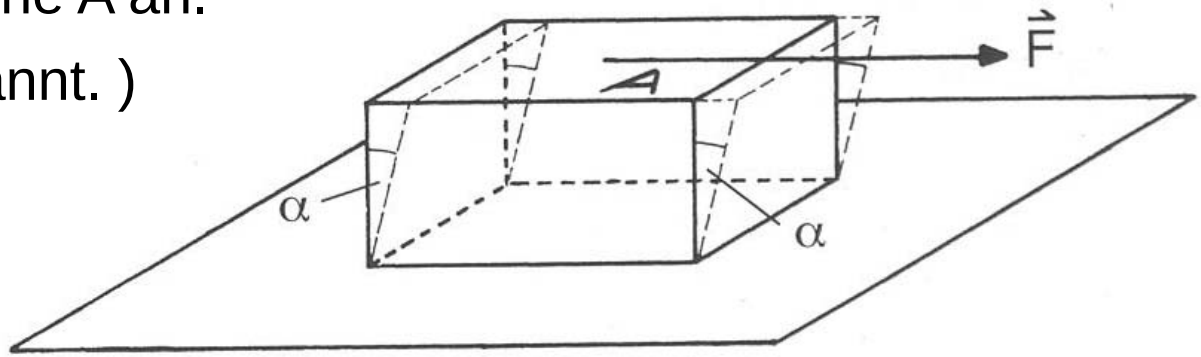
Scherkraft F greift **tangential** an Fläche A an.

(Körper an der Unterseite eingespannt.)

G = Schub- /Scher- / Torsionsmodul

τ = Schubspannung

α = Scherwinkel (im Bogenmaß)



$$\alpha = \frac{F}{G \cdot A} = \frac{\tau}{G}$$

Einheit G:
1 N / (m² rad)

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{E \cdot A}$$

Vergleich
Dehnung/Stauchung

- *Hooke'sches Gesetz: Lineare Änderung für* ***kleine*** α
- *elastische Verformung für kleine* α
- *Rückstellkräfte bei Verformung sind die interatomaren Kräfte,*
  daher sind E, K & G nicht unabhängig (oft: G ~ 0.4 E)

3.1 Festkörper

3b) **Scherung, Torsion**

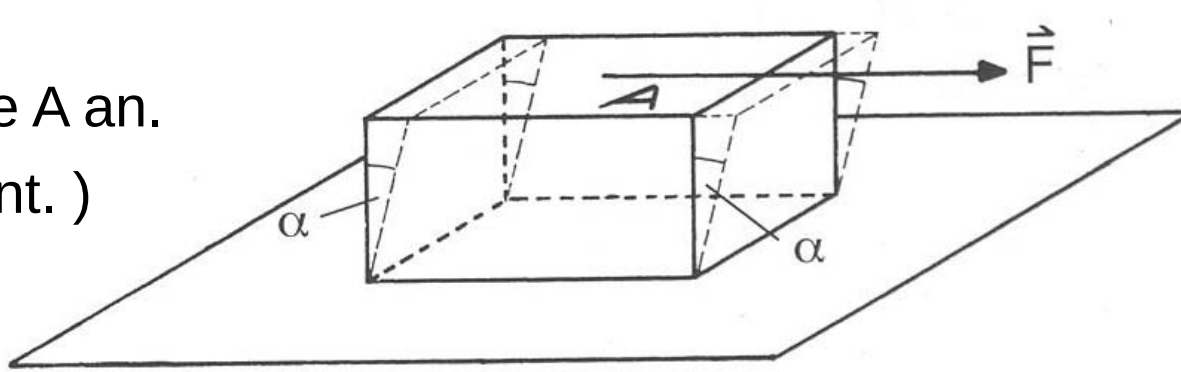
Scherkraft F greift **tangential** an Fläche A an.

(Körper an der Unterseite eingespannt.)

G = Schub- /Scher- / Torsionsmodul

τ = Schubspannung M = Drehmoment

α = Scherwinkel φ = Verdrillungswinkel



$$\alpha = \frac{F}{G \cdot A} = \frac{\tau}{G}$$

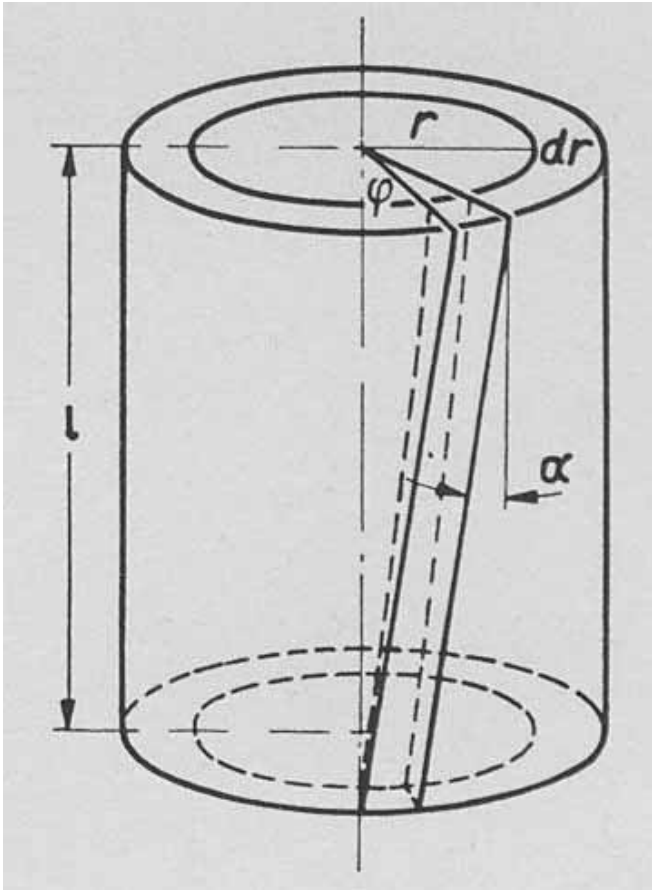
Einheit G:
1 N / (m² rad)

$$\varphi = \frac{1}{D^*} M$$

Einheit D:*
1 Nm / rad

Richtmoment

$$D^* = (\pi R^4 / 2L) \cdot G$$



dM = rdF

dF=αGdA

dA = r$d\theta$ dr

α = Rφ / L

Verdrillung eines Drahtes
(Länge L, Radius R)
beruht auf Scherung.

3.1 Festkörper

$$M = \underbrace{\frac{\pi G R^4}{2L}}_{D^*} \cdot \phi$$

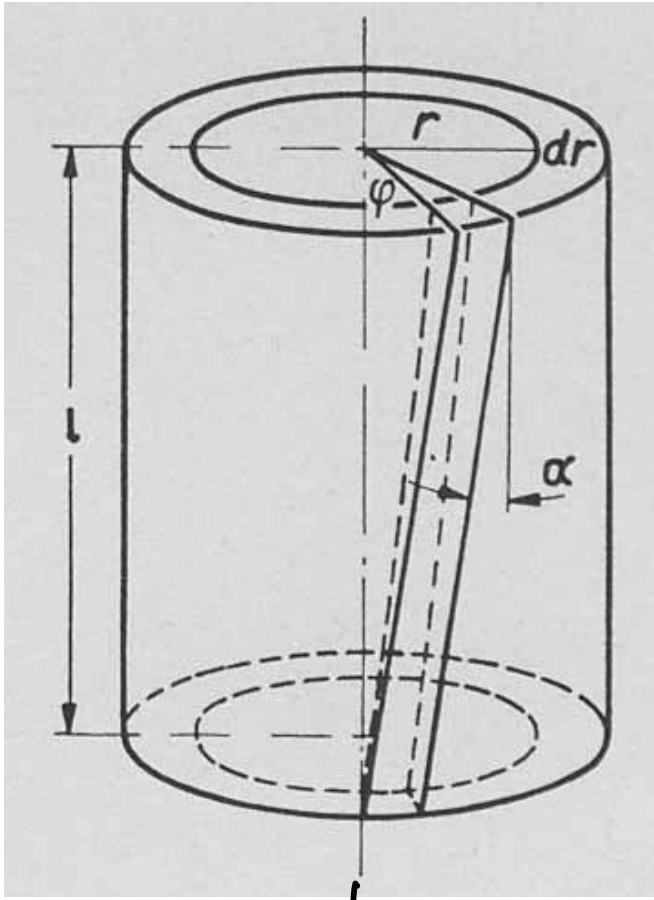
$$\phi = \frac{1}{D^*} M$$

$$dM = r\, dF$$

$$F = \alpha G A$$

$$dA = 2\pi r\, dr$$

$$\alpha = \frac{r\phi}{L}$$



$$dM = r\, dF = r \alpha G\, dA$$

$$= \alpha G\, 2\pi r^2\, dr = \frac{\phi G}{L}\, 2\pi r^3\, dr$$

$$\int_0^R dM = \int_0^R \frac{\phi G}{L}\, 2\pi r^3\, dr = \frac{R^4}{4L}\, 2\pi \phi G$$

3.1 Festkörper

Zum Zusammenhang zw.

Scherung und **Torsion**

$$\alpha = \frac{F}{G \cdot A} = \frac{\tau}{G}$$

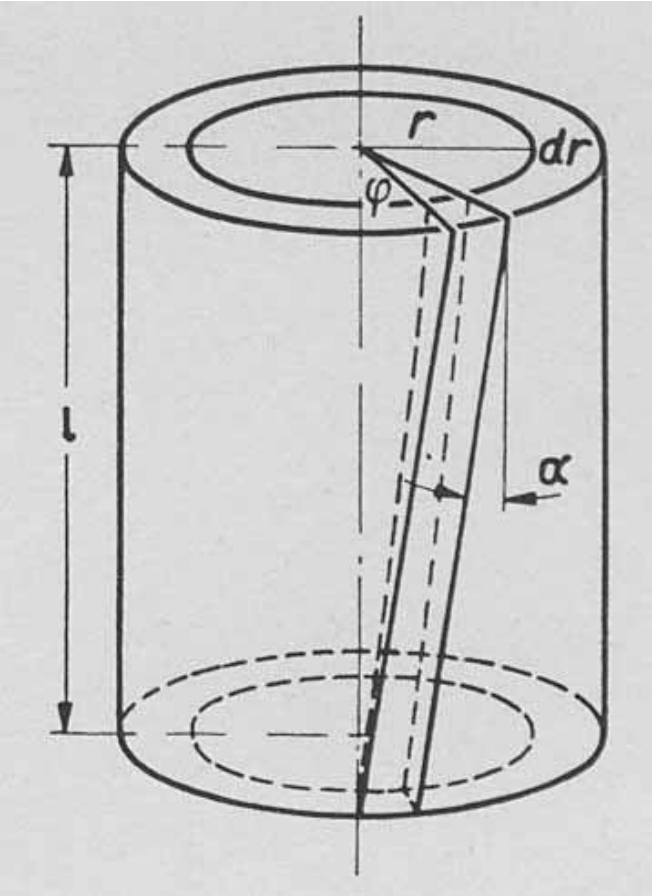
$$\varphi = \frac{1}{D^*} M$$

dM = rdF

F=αGA

dA = 2πrdr

α = rϕ/L



$$dM = rdF = r\alpha G dA = \alpha G 2\pi r^2 dr = \frac{\varphi G}{L} 2\pi r^3 dr$$

$$\int_0^R dM = \int_0^R \frac{\varphi G}{L} 2\pi r^3 dr = \frac{R^4}{4L} 2\pi\varphi G$$

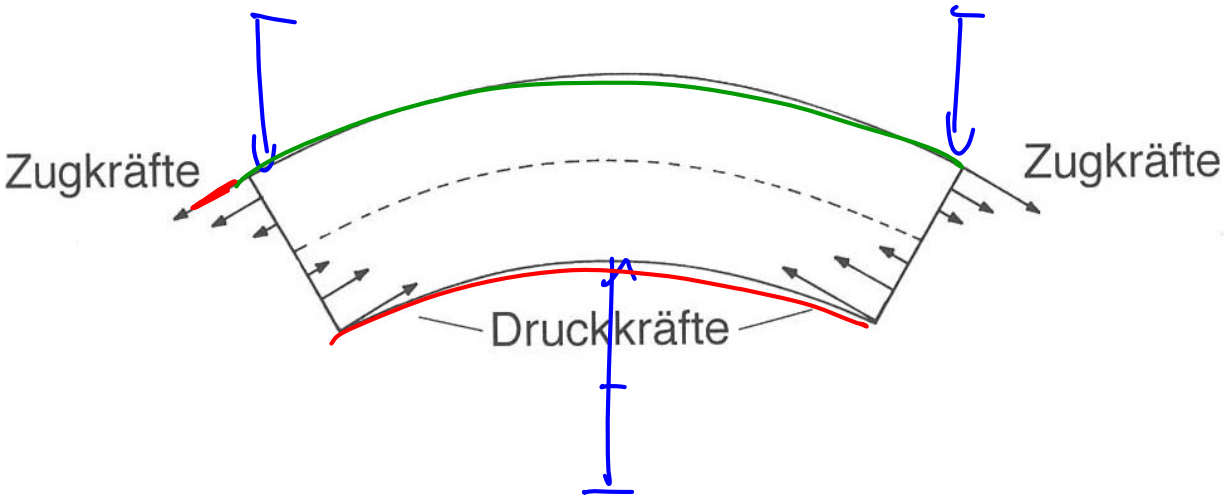
$$M = \frac{\pi G R^4}{2L} \pi \cdot \varphi = D^* \cdot \varphi$$

3.1 Festkörper

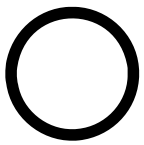
4) **Biegung**

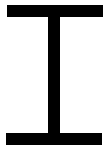
Körper wird oben gedehnt
und unten gestaucht.

Verformung ist außen maximal,
die **„neutrale Faser“** in der
Mitte ist spannungsfrei.



Stabil gegen Biegung & geringes Gewicht:
Rohr (Knochen) bzw. Doppel-T-Träger





Knochen optimiert für Kombination aus Zug- / Druck- / Biege- / Torsionsbelastung.
erhöhter Gehalt an anorganischen Kalziumsalzen ➔ Versprödung, Brüche
geringer ➔ plastische Verformung bei statischer Belastung

3.1 Festkörper: Zusammenfassung

- (Massen-)Dichte $\rho = m / V$ [Masse pro Volumen; Einheit: 1 kg/m3]

- Spannung (Druck p) $\sigma = F / A$ [Kraft pro Fläche; Einheit: 1 N/m2 = 1 Pa (Pascal)]

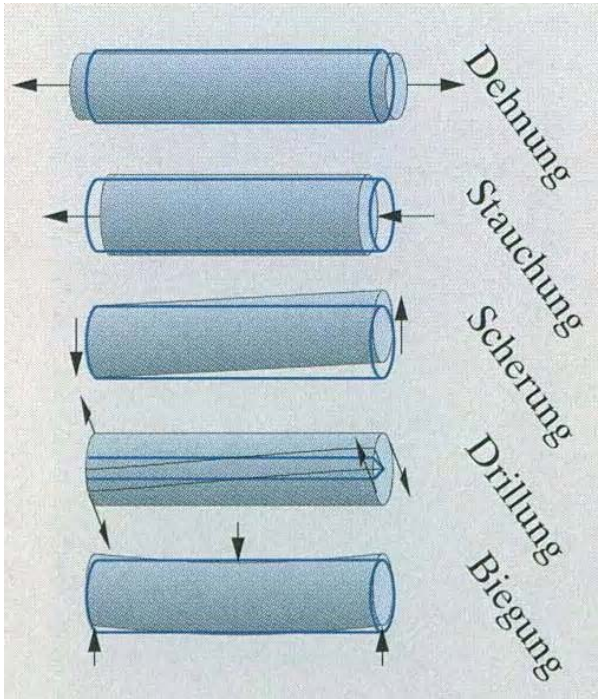
- Verformung von Festkörpern durch Kräfte

1) Formänderung <u>mit</u> Volumenänderung:
Dehnung/Stauchung, Kompression

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{E \cdot A} \qquad \frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K} = -\kappa p$$

2) Formänderung <u>ohne</u> Volumenänderung:
Scherung, Torsion, Biegung

$$\alpha = \frac{F}{G \cdot A} = \frac{\tau}{G} \qquad \varphi = \frac{1}{D^*} M$$



3.2 Hydrostatik

Flüssigkeiten: nicht formstabil, aber **volumenstabil** (V~const)

Keine Fernordnung; Teilchen gegeneinander frei verschiebbar.

Flüssigkeiten zeigen eine definierte **Oberfläche** (im Unterschied zum Gas).

Teilchen dicht gepackt, Flüssigkeiten sind nur schwach kompressibel,

d.h. Flüssigkeiten widerstehen Kräften **senkrecht** zur Oberfläche,

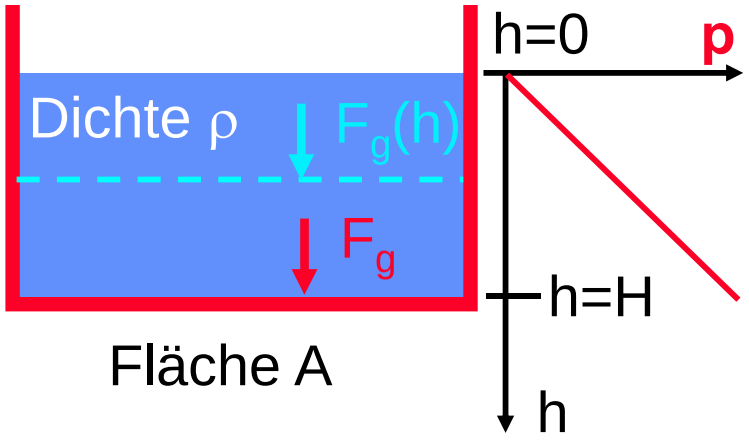
aber nicht *(langsamen)* **Scherkräften** (**parallel** zur Oberfläche)

Im Folgenden benutzen wir das **Modell der idealen Flüssigkeit:**

- inkompressibel
- keine innere Reibung (Viskosität), nur äußere Reibung an Behälterwand

3.2 Hydrostatik

Schweredruck (hydrostatischer Druck)



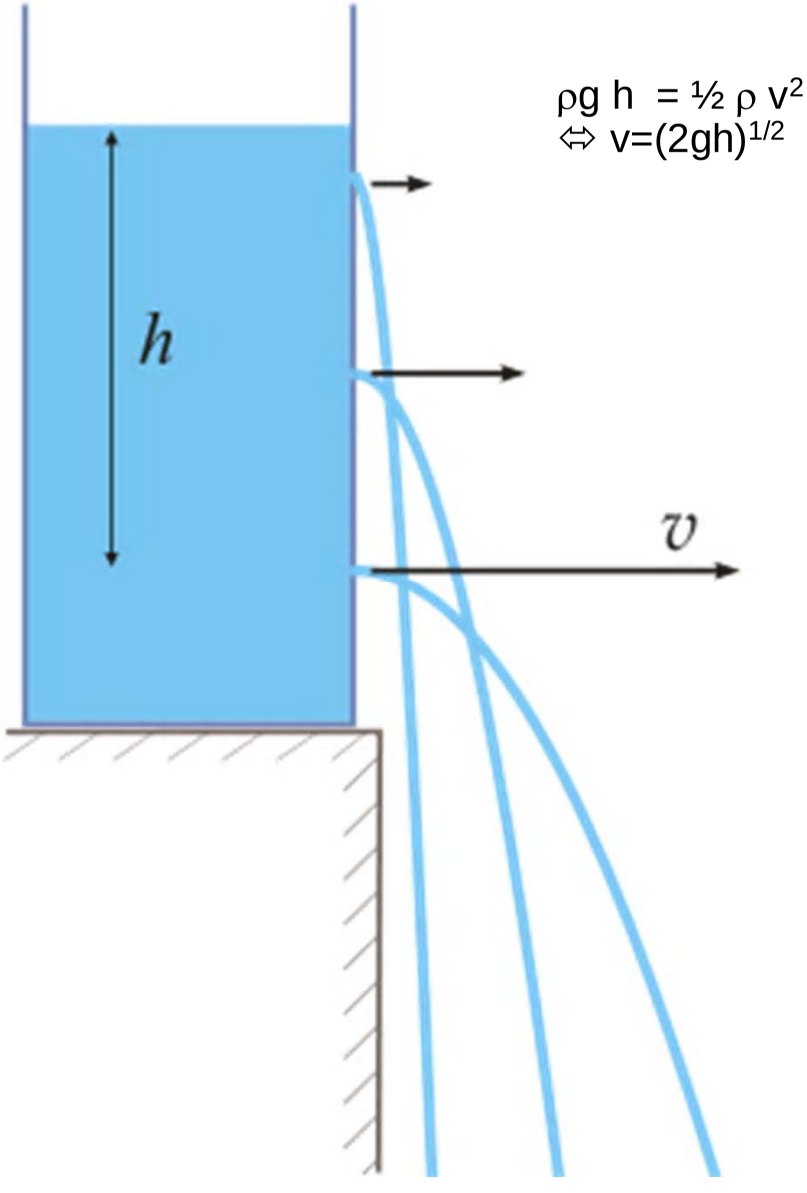
Kraft der Flüssigkeitssäule auf Bodenplatte: $F_g = m \cdot g = \rho V \cdot g = \rho \cdot A \cdot H \cdot g$

Kraft der oberen Schicht bei der **Tiefe h**: $F_g(h) = m(h) \cdot g = \rho V(h) \cdot g = \rho \cdot A \cdot h \cdot g$

$$\boxed{p(h) = \frac{F_g(h)}{A} = \rho \cdot g \cdot h}$$

(ρ = const, d.h. inkompressibel)

Gesetz von Torricelli



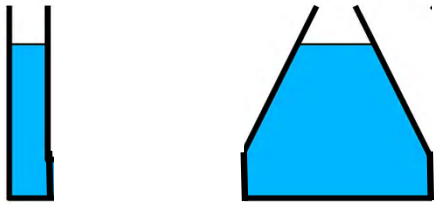
$\rho g\, h = \frac{1}{2} \rho v^2$
$\Leftrightarrow v = (2gh)^{1/2}$

Druck nimmt nach unten zu,
Austrittsgeschwindigkeit höher

Seitliches Spritzen:
Allseitigkeit des Druckes,
Druck ist **keine Vektorgröße**

3.2 Hydrostatik

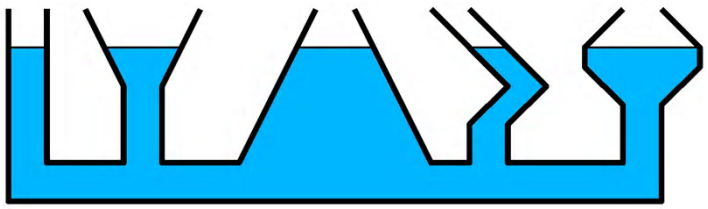
Hydrostatisches Paradoxon



Ist der Druck am Boden des rechten Behälters größer ?

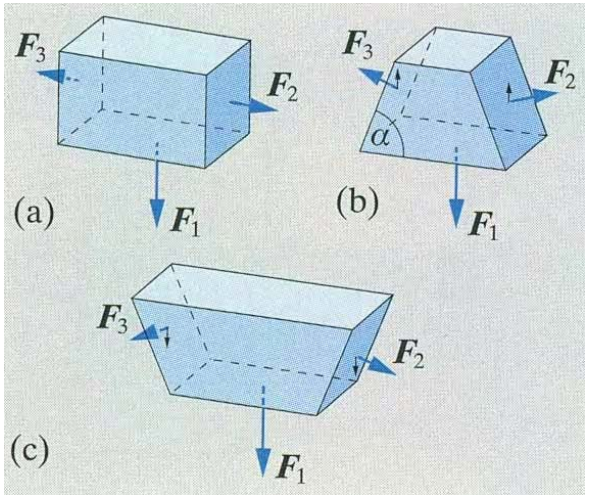
Nein !

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$



Der Druck hängt **nur** von der **Höhendifferenz** ab, nicht von der Form des Behälters

In kommunizierenden Röhren steigt das Wasser überall gleich hoch.

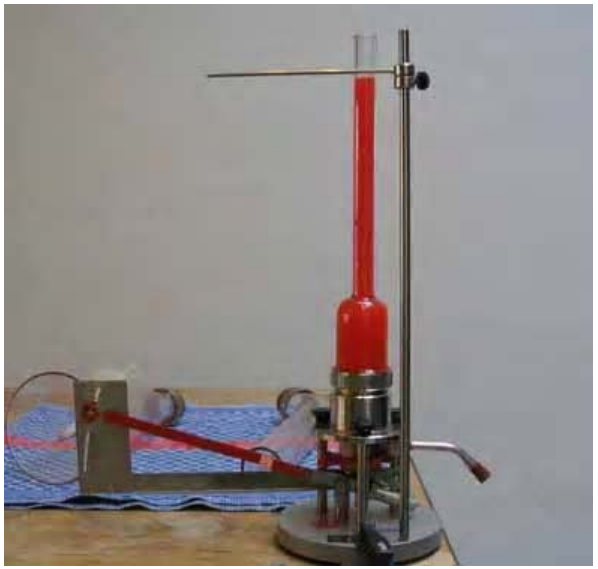


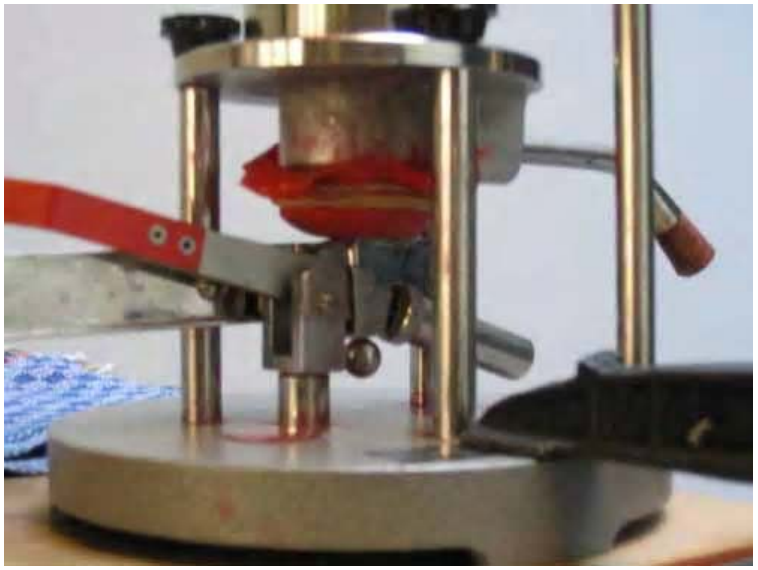
Erklärung: actio=reactio,
(b) Wände drücken mit,
(c) Wände fangen Kraft auf.
Netto-Kraft = 0 auf alle Flüssigkeitsteilchen

3.2 Hydrostatik

Hydrostatisches Paradoxon

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$





3.2 Hydrostatik

Beispiele zum Schweredruck: $p = \rho \cdot g \cdot h$

Wasser: (ρ = 1 g / cm^3 = 1000 kg / m^3 @ 4°C)

h = 1m: p = 1000 kg / m^3 * 10 m / s^2 * 1 m = 10 000 N / m^2

h = 10m: p ~ 100 000 N / m^2 = 10^5 Pa = **1 bar**

p = 1 bar unter
10 m Wassersäule
oder 760 mm Hg-Säule

Quecksilber: (ρ = 13.5 g / cm^3)

h = 1m: p ~ 1.33 10^5 Pa = 1.33 bar

h = 760 mm: p_0 = 1.013 bar = 1 atm = 760 mm Hg = 760 Torr

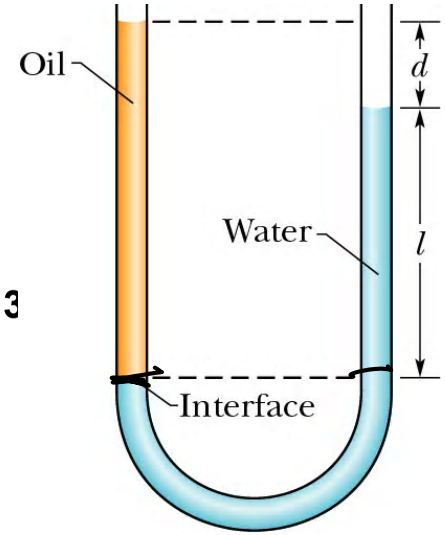
(= Normaldruck an Erdoberfläche)

Öl: (ρ = ?)

l = 135 mm, d = 12.5 mm

An der Grenzfläche ist der Druck gleich:

$\rho_{H20} g l = \rho_{Öl} g (l+d)$ ➔ $\rho_{Öl} = \rho_{H20}\, l/(l+d)$ ~ **915 kg / m^3**



3.2 Hydrostatik

Gasdruck / Luftdruck / Atmosphärendruck

Luft auf Meereshöhe (Normalbedingungen): p_0 = 1.013 bar, ρ_0 = 1.29 kg/m^3

Annahme: Dichte der Luft ist konstant ➔ Dicke der Luftschicht:

$$h = p_0 / (\rho_0 g) = 1.013\ 10^5\ N/m^2 / (1.29\ kg/m^3\ 9.81\ m/s^2) \sim 8\ km$$

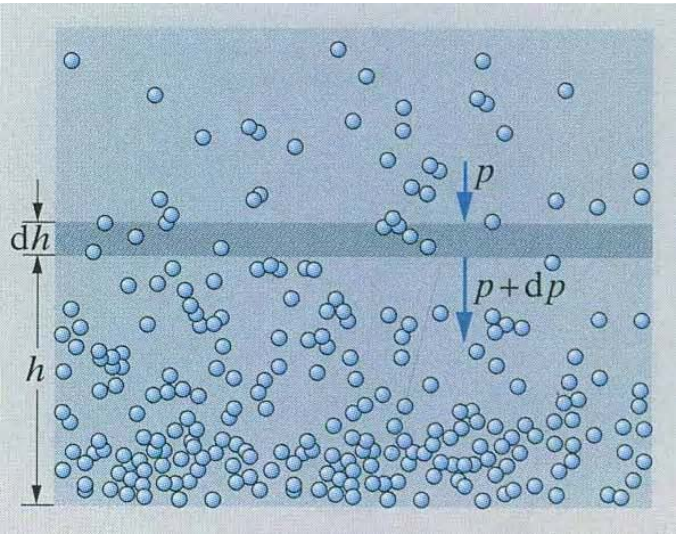
$\rho \neq$ **const**: Dichte der Luft hängt von der Höhe bzw. von p ab (Gas ist kompressibel)

$$dp = -\rho(h') \cdot g \cdot dh'$$ *minus: dp<0 für dh´>0*

Boyle-Mariotte für ideales Gas bei konstanter Temperatur (siehe Kapitel 4):

$\boxed{pV = const}$ bzw.

da ρ=m/V mit m constant



h´

$p/\rho = p_0/\rho_0$ = const

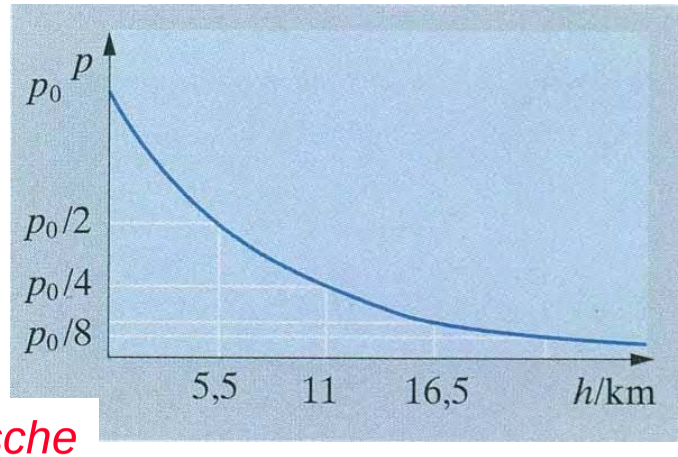
➔ $\rho = \rho_0/p_0 \cdot p$

➔ $dp/p = -(\rho_0/p_0) \cdot g dh'$

⇔ $dp/dh' = -(\rho_0/p_0) \cdot g \cdot p$

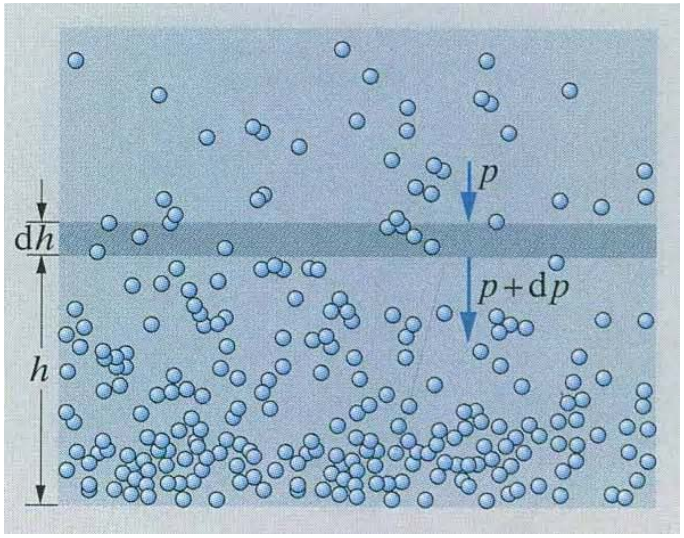
$$\boxed{p(h') = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h'}}$$

Barometrische Höhenformel



p(8km) ~ 0.386 p_0

3.2 Hydrostatik



$$dp = -\rho(h') \cdot g \cdot dh'$$

minus: dp<0 für dh´>0

Boyle-Mariotte:

für ideales Gas bei konstanter Temperatur :

3.2 Hydrostatik

Gasdruck / Luftdruck / Atmosphärendruck

Luft auf Meereshöhe (Normalbedingungen): p_0 = 1.013 bar, ρ_0 = 1.29 kg/m^3

Annahme: Dichte der Luft ist konstant ➔ Dicke der Luftschicht:

$$h = p_0 / (\rho_0 g) = 1.013\ 10^5\ N/m^2 / (1.29\ kg/m^3\ 9.81\ m/s^2) \sim 8\ km$$

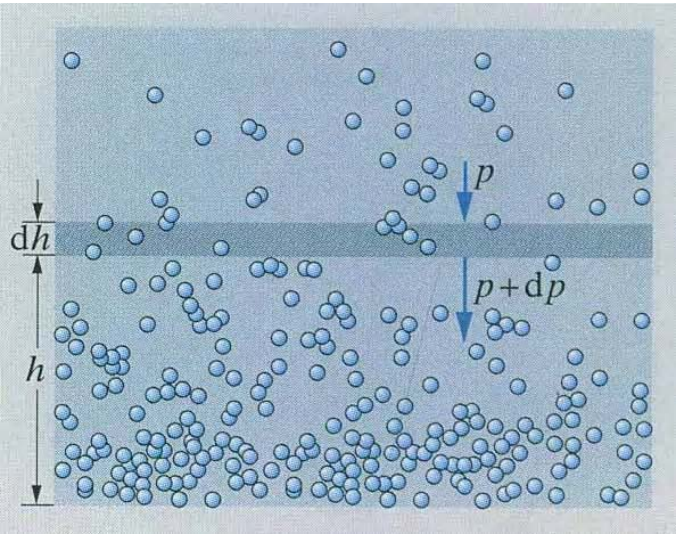
$\rho \neq$ **const**: Dichte der Luft hängt von der Höhe bzw. von p ab (Gas ist kompressibel)

$$dp = -\rho(h') \cdot g \cdot dh'$$ *minus: dp<0 für dh´>0*

Boyle-Mariotte für ideales Gas bei konstanter Temperatur (siehe Kapitel 4):

$\boxed{pV = const}$ bzw.

da ρ=m/V mit m constant



h´

$p/\rho = p_0/\rho_0$ = const

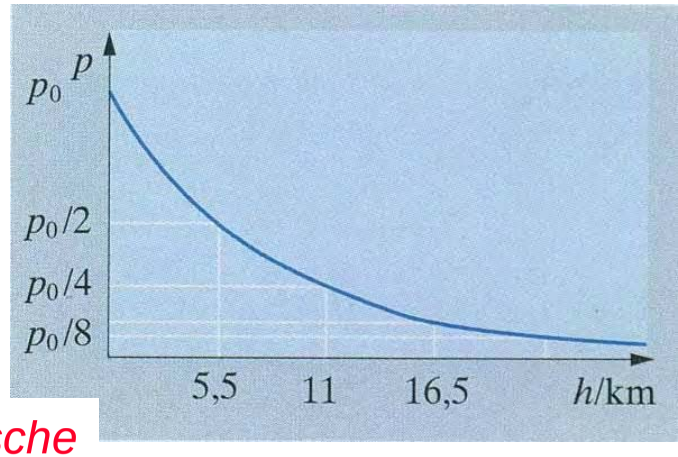
➔ $\rho = \rho_0/p_0 \cdot p$

➔ $dp/p = -(\rho_0/p_0) \cdot g dh'$

⇔ $dp/dh' = -(\rho_0/p_0) \cdot g \cdot p$

$$\boxed{p(h') = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h'}}$$

Barometrische Höhenformel



p(8km) ~ 0.386 p_0