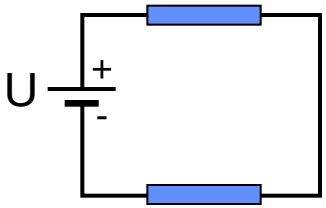
5 Elektrizitätslehre

Grundbegriffe:

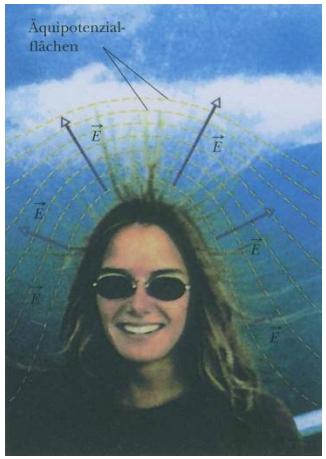
Ladung, Coulomb-Kraft, Spannung, Strom, Widerstand, Arbeit, Energie, Potential, Leistung

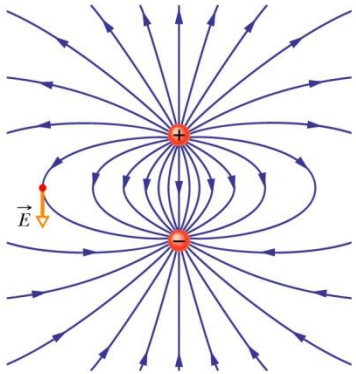
Elektrische Netzwerke



Elektrisches Feld

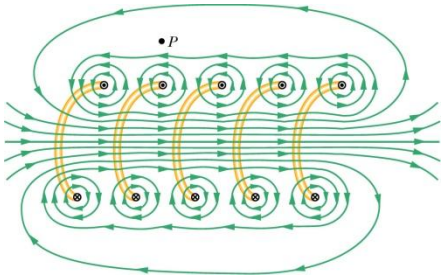
Feldstärke, Dipol, Potential, Kondensator, Materie im Feld / Polarisation





Magnetfeld

Felder von Strömen, Lorentz-Kraft, magn. Dipol, Spule, Induktion

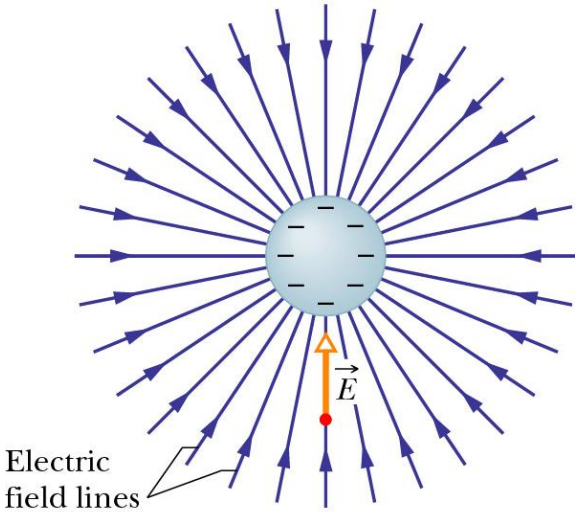


Wechselfelder

Wechselstromwiderstand, elektromagnetische Wellen

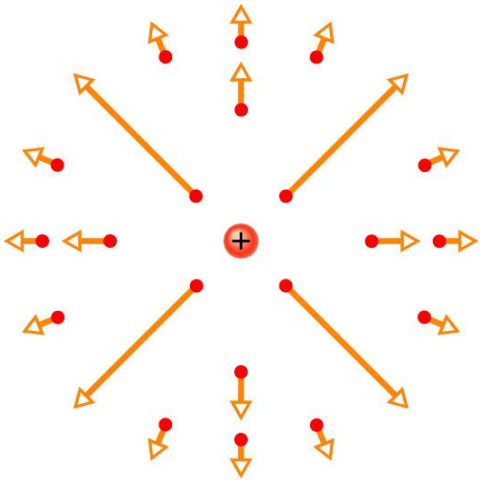
5.3 Elektrisches Feld: Feldlinien

Veranschaulichung des E-Feldes über Feldlinien



Feldlinien im **elektrostatischen Feld:**

- verlaufen von einer positiven Ladung zu einer negativen.
- beginnen oder enden nie im freien Raum.
- schneiden sich niemals.
- sind nur eine Veranschaulichung (real ist das E-Feld).
- Die Richtung des E-Feldes in r ist gleich der Richtung der Tangente an die Feldlinie in r.
- Die Dichte der Feldlinien ist proportional zur Feldstärke. (Dichte = Anzahl Linien durch Einheitsfläche senkrecht zu den Linien)
- Für ein elektrostatisches Feld gibt es keine in sich geschlossenen Feldlinien (*im Gegensatz zu z.B. Magnetfeld eines stromführenden Drahtes*)

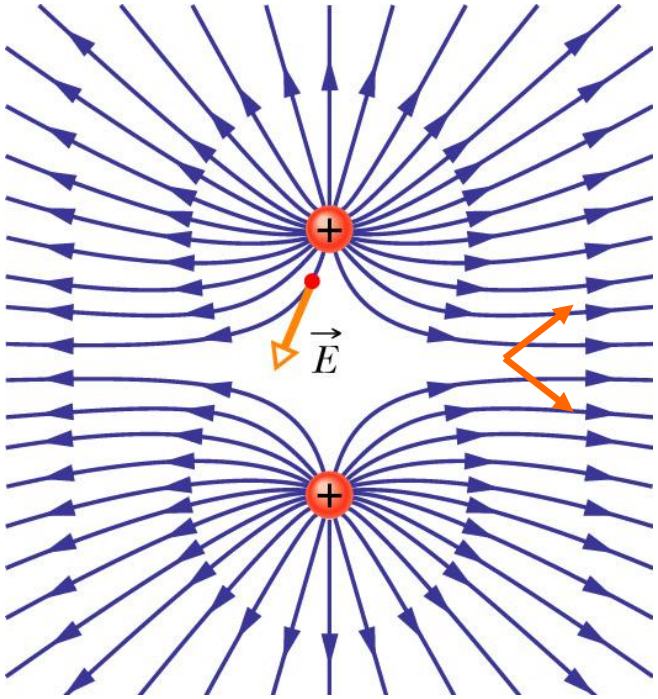


5.3 Elektrisches Feld: Dipol

Feldlinien

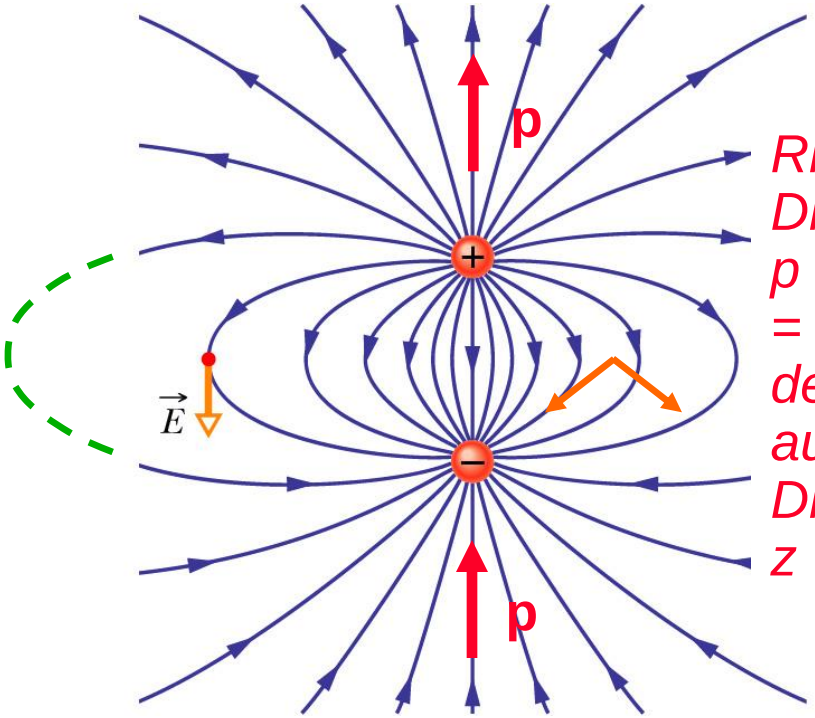
Superposition: E-Felder addieren sich vektoriell.

2 gleichnamige Ladungen (gleich groß)



In der Mitte heben sich die Felder der 2 Ladungen gegenseitig auf, außen verstärken sie sich (für r >> d ähnlich dem Feld einer Punktladung mit 2q).

Dipolfeld: 1 positive und 1 gleich große negative Ladung

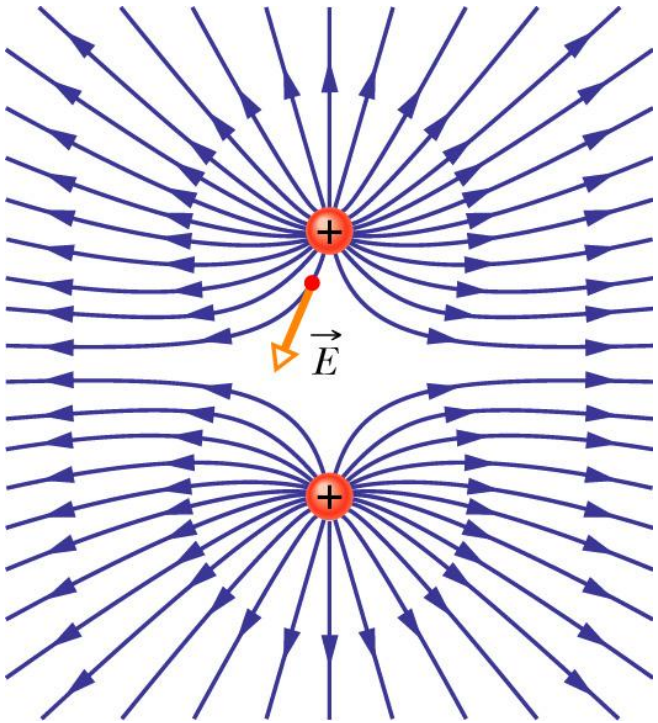


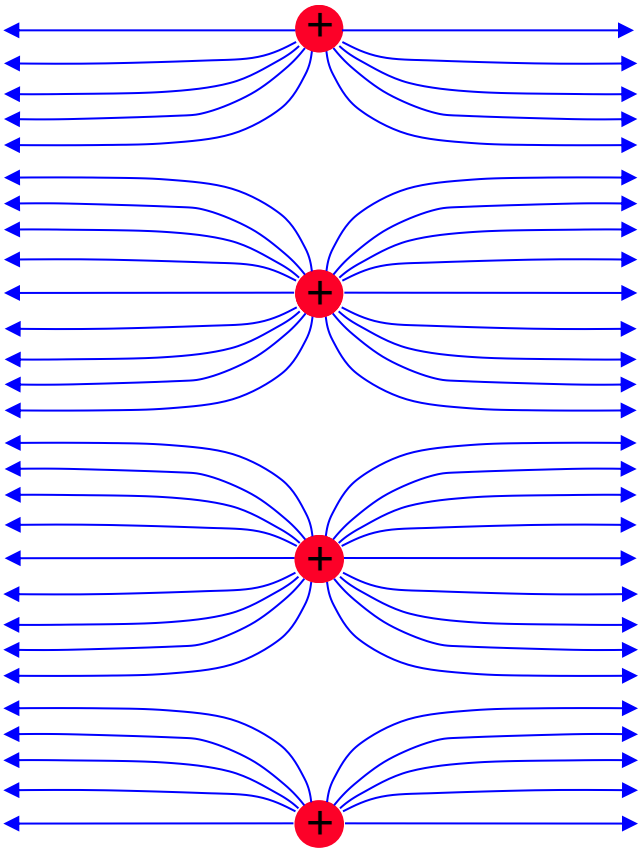
Richtung des Dipolmoments p = Richtung des E-Feldes auf der Dipolachse für z > d/2

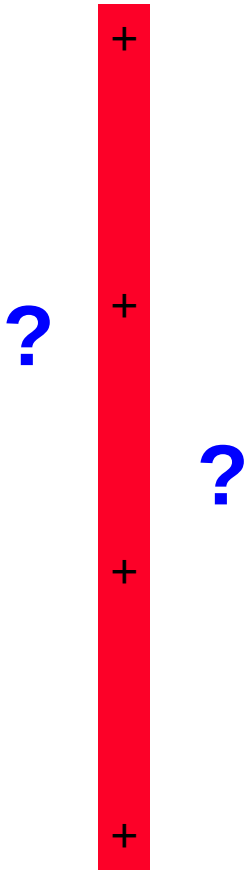
In der Mitte verstärken sich die Felder der 2 Ladungen, außen heben sie sich (**fast**) auf ($\sim 1/r^3$, $q_{ges}=0$).

5.3 Elektrisches Feld: homogene Platte

Feldlinien Übergang von 2 über 4 Ladungen zur homogen geladenen Platte







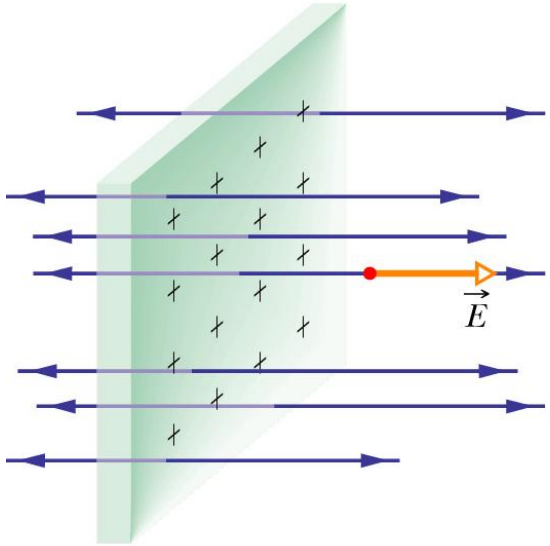
5.3 Elektrisches Feld: homogene Platte

Feldlinien

einer **unendlich ausgedehnten**, leitenden Platte

mit einer **gleichförmig verteilten** Ladung

(d.h. **q / A = const**)

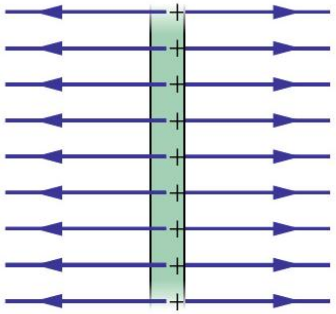


(b)

Aus Symmetriegründen heben sich alle Kräfte parallel zur Platte auf.

➔ das E-Feld steht überall senkrecht zur Platte und ist wegen der homogenen Ladungsverteilung überall gleich groß, unabhängig vom Abstand r (die Feldliniendichte wird nicht kleiner mit r !)

➔ **homogenes Feld**



(c)

Real gilt das gut in der Mitte einer großen Platte.

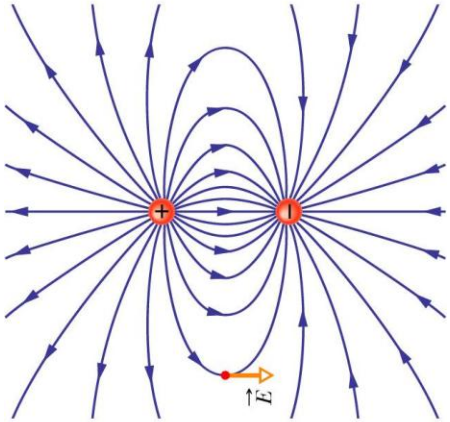
Feldlinien stehen immer senkrecht auf Metalloberflächen.

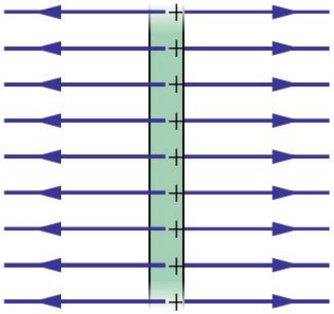
5.3 Elektrisches Feld

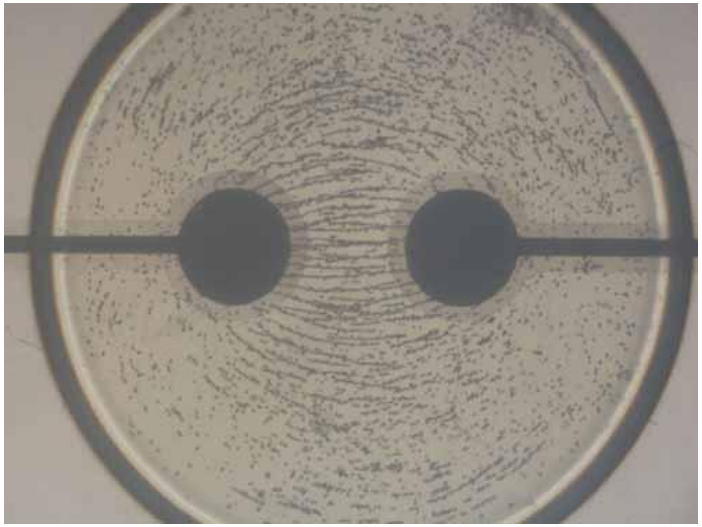
Feldlinien

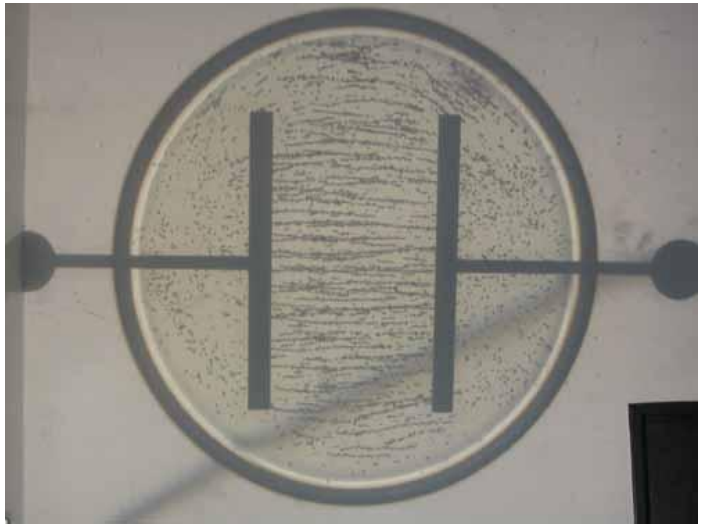
Experiment

Grieskörner in Öl









Das Dipolmoment der Grieskörner richtet sich im Feld entlang der Feldlinien aus.

5.3 Elektrisches Feld: Potential

Elektrische Spannung U_{ab} (= Potentialdifferenz $\varphi_b - \varphi_a$) zwischen r_a & r_b:

1) $W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} (-\vec{F}) \cdot d\vec{r}$ 2) $U_{ab} = \frac{W}{q_1}$ 3) $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_1}$

$$\boxed{\Rightarrow U_{ab} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} -\vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

Potential φ:

Fester Bezugspunkt bei r=∞ mit $\varphi(\infty) = 0$:

$$\varphi(\vec{r}_b) = \varphi(\vec{r}_b) - \varphi(\infty) = U_{\infty b} \Rightarrow \boxed{\varphi(\vec{r}_b) = \int_{\infty}^{\vec{r}_b} -\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

ableiten ➔

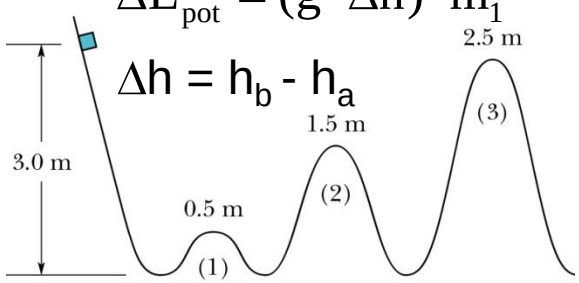
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -grad \ \ \varphi(\vec{r})}$$

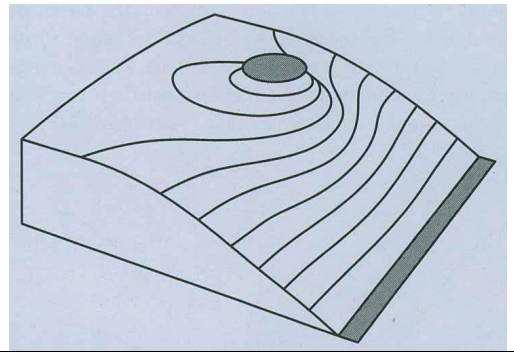
$$grad\left(\varphi(\vec{r})\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

„Potentialgebirge“ in 1D & 2D: h(x,y) oder φ(x,y)

$$\Delta E_{pot} = (g \cdot \Delta h) \cdot m_1$$

$$\Delta h = h_b - h_a$$

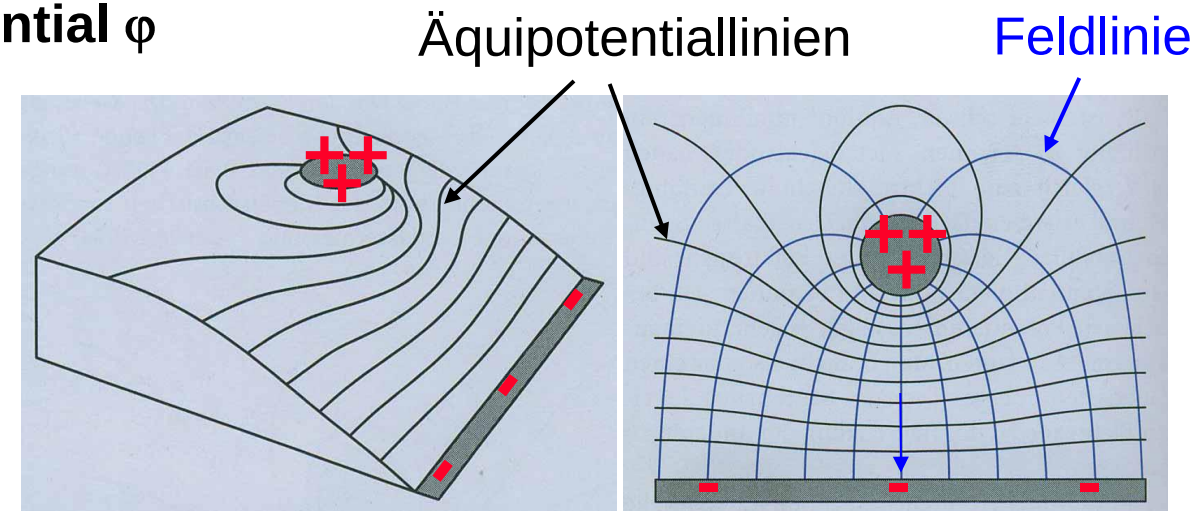




An jedem Punkt $\vec{r}$ eines **Vektorfeldes** $\vec{E}(\vec{r})$ existiert ein **skalares Feld** $\varphi(\vec{r})$.

5.3 Elektrisches Feld: Potential

E-Feld und Potential φ



1) Der Vektor E zeigt in die **Richtung des größten Potentialgefälles**.

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -grad \quad \varphi(\vec{r})}$$

entlang einer Feldlinie (r||E): $\left|\vec{E}\right| = -\frac{d\varphi}{dr}$

2) Je steiler das Potentialgefälle, desto größer das Feld (& die Kraft).

3) Verschieben einer Ladung q auf einer Äquipotentialfläche kostet keine Arbeit ($W = \Delta E_{pot} = 0$).

4) Äquipotentiallinien (oder –flächen) stehen **senkrecht** auf Feldlinien.

5.3 Elektrisches Feld: Potential

Äquipotentiallinien

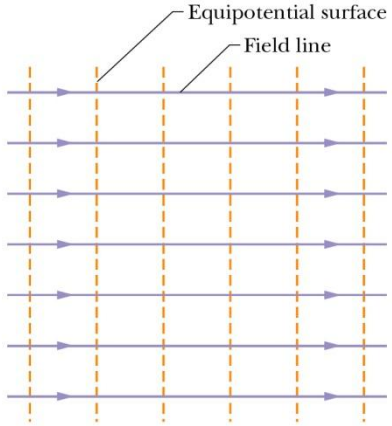
(= Linien oder Flächen gleichen Potentials, φ = const)

$$W = qU_{ab} = q\{\varphi(\vec{r}_b) - \varphi(\vec{r}_a)\} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} -q\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

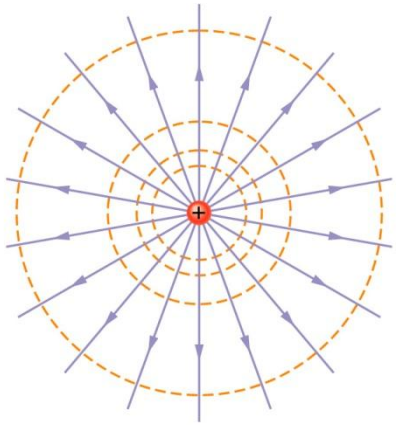
- Verschieben einer Ladung q auf einer Äquipotentialfläche kostet keine Arbeit (W=0).
- **Äquipotentialflächen stehen senkrecht auf den Feldlinien.**

$$\vec{E} \perp d\vec{r} \quad \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow W = 0$$

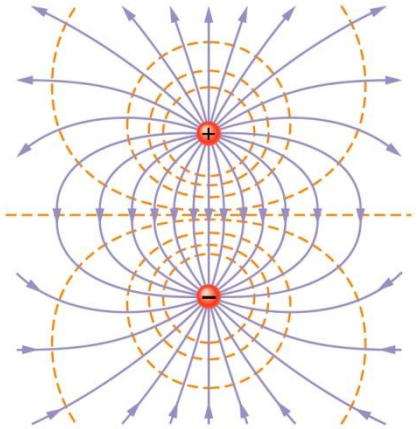
für dr auf einer Äquipotentialfläche

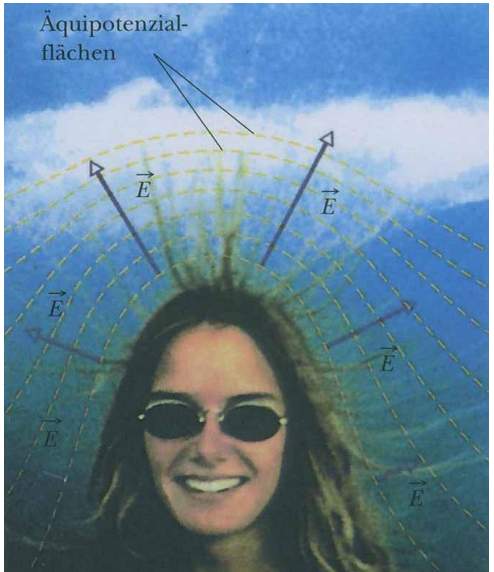


(a)

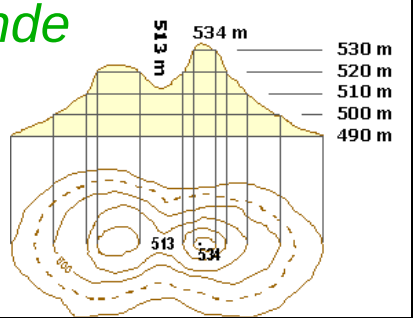


(b)





Analog: Höhenlinien im Gelände



5.3 Elektrisches Feld: Potential

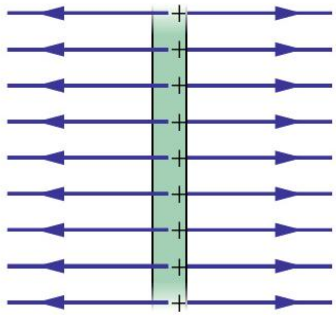
Äquipotentiallinien

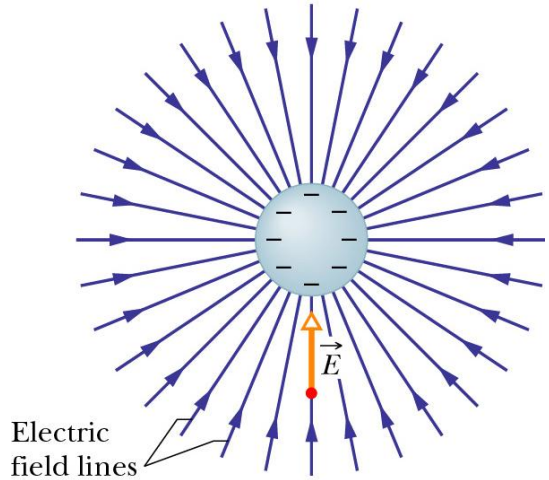
(= Linien oder Flächen gleichen Potentials, φ = const)

In einem metallischen Leiter bewegen sich die frei beweglichen Ladungsträger so lange, bis alle das gleiche Potential haben.

➔ im Gleichgewicht (*Elektrostatik, keine Ströme*) ist die **Oberfläche eines metallischen Leiters eine Äquipotentialfläche**

➔ Feldlinien stehen senkrecht auf einer metallisch leitenden Oberfläche

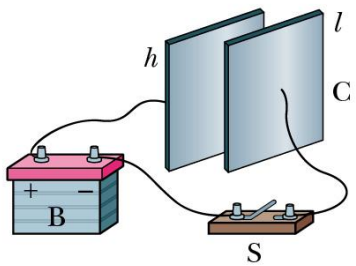




5.3 Elektrisches Feld: Kondensator

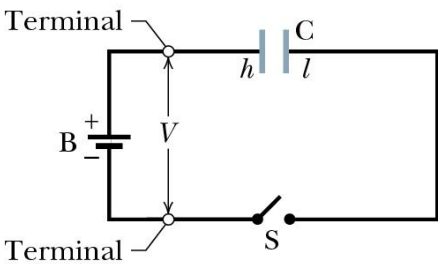
Ein **Kondensator**

besteht aus 2 gleich großen, gegeneinander isolierten **Metallplatten** (jeweils der **Fläche A**) im **Abstand d**.



(a)

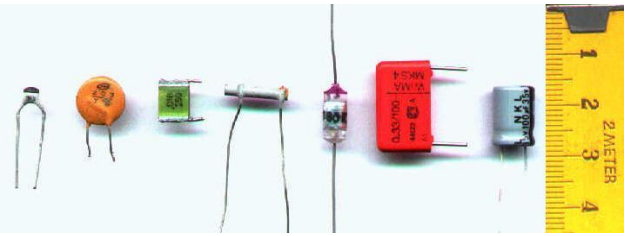
Über eine Batterie mit **Spannung U** erhalten die Platten in einem kurzen Stromstoß die **Ladungen +/- q**.
(Kein Dauerstrom, da der Stromkreis nicht geschlossen ist)

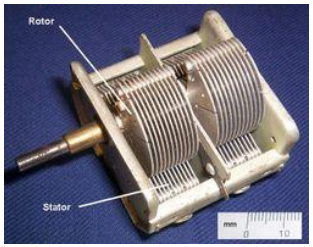


oder:

Beim **Aufladen** des Kondensators entzieht die Batterie der einen Platte die Ladung q und schiebt diese auf die andere Platte.

➔ Gesamtladung des Kondensators: $q_{ges} = +q - q = 0$



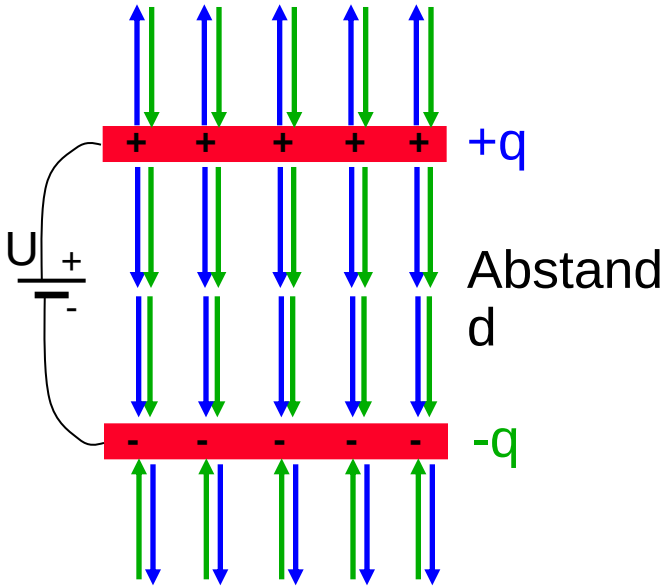


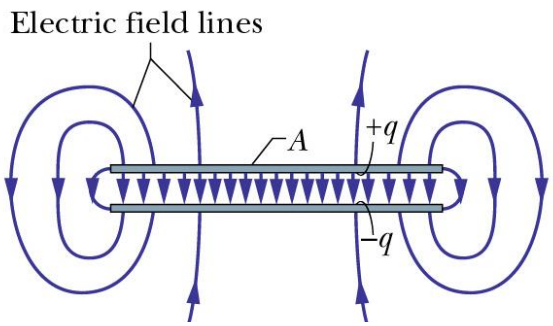
Drehkondensator
mit variabler Kapazität

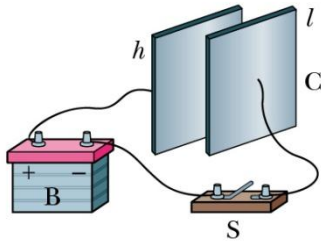
Binärer Datenspeicher:
„1“: Kondensator geladen
„0“: ungeladen

5.3 Elektrisches Feld: Kondensator

E-Feld und Spannung U







Addition der E-Felder

einer (unendlichen) Platte mit pos. Ladung (s. 5.3-12) und einer (unendlichen) Platte mit negativer Ladung:

Das **E-Feld im Inneren ist homogen** (für A >> d)

$$U = \int_0^d -\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_0^d E\cdot dr = E\int_0^d dr \Rightarrow \boxed{U = E\cdot d}$$

Weg von „-“-Platte zu „+“-Platte

➔ *E antiparallel dr* $\Rightarrow -\vec{E}\cdot d\vec{r} = +E\cdot dr$

$$U_{-\to+} = \varphi_+ - \varphi_-$$

Arbeit zum Verschieben einer Probeladung q von „-“ Platte zur „+“ Platte:

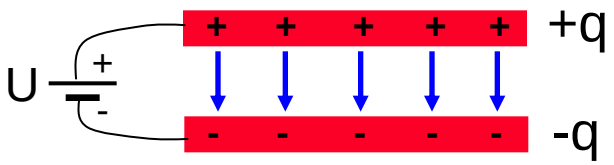
$$W = q\cdot U = q\cdot(E\cdot d)$$
$$= -\vec{F}\cdot\vec{d} = +(q\cdot E)\cdot d$$

1 J = 1 C V = 1 C (V/m) m
= 1 Nm = 1 C (N/C) m
= 1 V As = 1 Ws = ….

-F = Kraft, mit der wir ziehen
F = Coulomb-Kraft

5.3 Elektrisches Feld: Kondensator

Kapazität C eines Plattenkondensators:

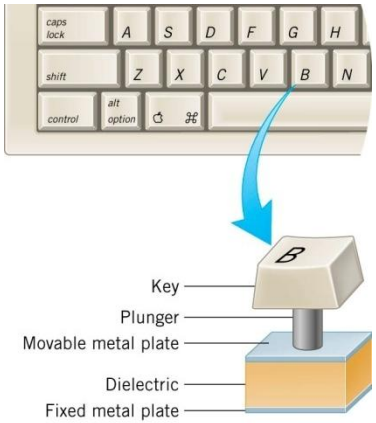


Wie viel Ladung trägt der Kondensator bei einer gegebenen Spannung U ?

$$C = q / U$$

Einheit: **1 C/V = 1 As/V = 1 F (Farad)**

Analogon:
Eimer mit ∞ hohen Wänden:
q ⇔ Wasservolumen V
U ⇔ Wassertiefe h
C ⇔ Eimer-Querschnittsfläche A



C hängt nur von der Geometrie ab:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

1) größere Fläche, mehr Ladung
2) +/- ziehen sich an
➔ mehr Ladung für kleineren Abstand d

ε_0 = 8.8542 •10^{-12} C^2/Nm^2
= **8.8542 pF / m**

Bsp:
d_1=0.1mm, A_1=1cm^2
➔ C_1=8.9•10^{-12}F = 8.9 pF

d_2=10mm, A_2=100cm^2
➔ C_2=8.9•10^{-12}F

$$\Rightarrow q = \varepsilon_0 \frac{A}{d} U$$

$$\Rightarrow E = \frac{U}{d} = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

Experiment
Wie ändern sich U und E, wenn d größer wird ?

5.3 Elektrisches Feld: Satz von Gauß

Bsp. aus der Hydrodynamik:

homogenes Geschwindigkeitsfeld v(r):

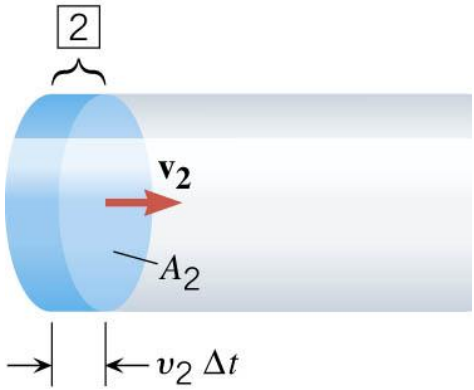
jedem Punkt r der Fläche A ist ein Vektor v(r) zugeordnet.

-> Der Fluss Φ

Volumenstrom durch Fläche A:

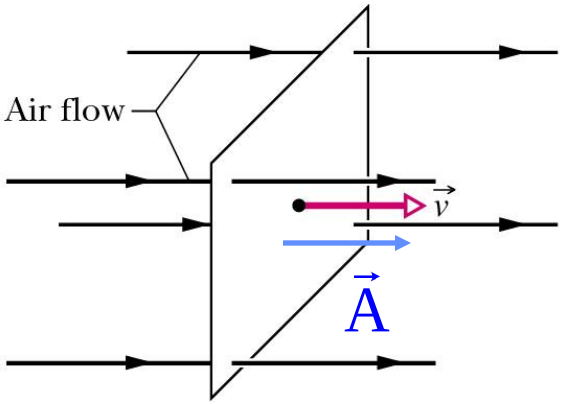
$$I_V = \frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

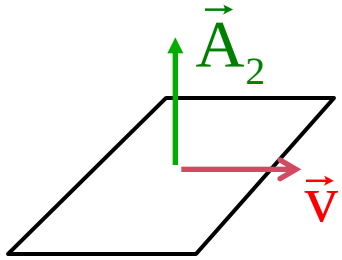
$$\boxed{\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A}}$$



Φ ist der **Fluss** des Geschwindigkeitsfeldes v(r) durch die Fläche A

(allg.: Skalarprodukt einer Fläche A mit einem A durchdringenden Feld)





$\vec{v} \perp \vec{A}_2$

Vektor A:

Richtung: **senkrecht** auf Fläche A

Betrag: **Flächeninhalt** von A

$$\vec{v} \parallel \vec{A} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{A} = v \cdot A \neq 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{A}_2 = 0$$

5.3 Elektrisches Feld: Satz von Gauß

Der Fluss Φ eines elektrischen Feldes

Hydrodynamik:

$$\Phi_v = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Elektrodynamik:

$$\boxed{\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

$\oint d\vec{A}$: Integral über **geschlossene** Fläche A

$d\vec{A}$: **Vektor**, *Richtung*: **senkrecht** auf dem Flächenelement dA, von innen **nach außen**; *Betrag*: **Flächeninhalt** von dA

Der Fluss Φ ist proportional zur Anzahl der Feldlinien, die die geschlossene Fläche A senkrecht durchdringen.

Feldstärke ~ Feldliniendichte bzw. Flussdichte

5.3 Elektrisches Feld (24): Satz von Gauß

Der Fluss Φ eines elektrischen Feldes

$$\Phi_v = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

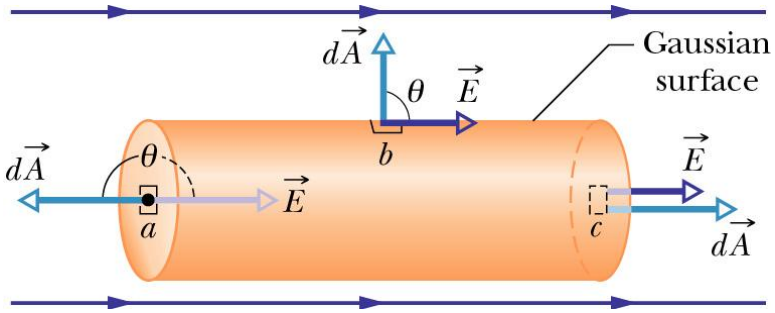
$$\boxed{\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

$\oint d\vec{A}$: Integral über **geschlossene** Fläche A

Der Fluss Φ ist proportional zur Anzahl der Feldlinien, die die geschlossene Fläche A senkrecht durchdringen.

$d\vec{A}$: **Vektor**, *Richtung*: **senkrecht** auf dem Flächenelement dA, von innen **nach außen**; *Betrag*: **Flächeninhalt** von dA

Bsp.: Zylinder im homogenen E-Feld (Achse || Feld)



$$\Phi = \Phi_{Mantel} + \Phi_{links} + \Phi_{rechts} = 0$$

1) Zylindermantel: E ⊥ dA ➔ E dA = 0

2) rechts & links:

$$\Phi_{rechts} = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \vec{E} \int d\vec{A} = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$$

$$\Phi_{links} = \vec{E} \cdot \vec{A} = -EA$$

Netto „fließt“ genau so viel Feld rein wie raus.

5.3 Elektrisches Feld: Satz von Gauß

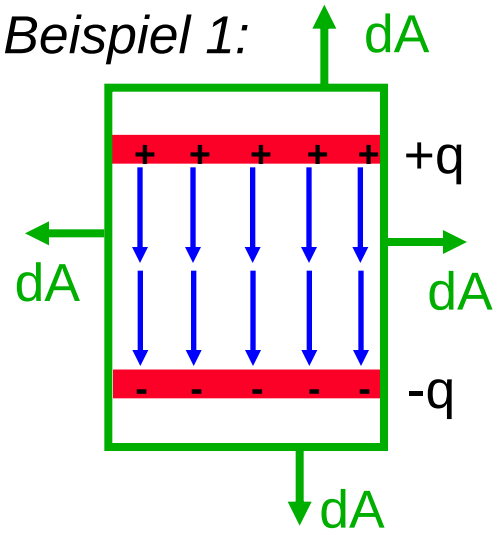
Satz von Gauß

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Der **Fluss** durch eine **geschlossene Fläche A** ist proportional zur von der Fläche **eingeschlossenen Ladung**.

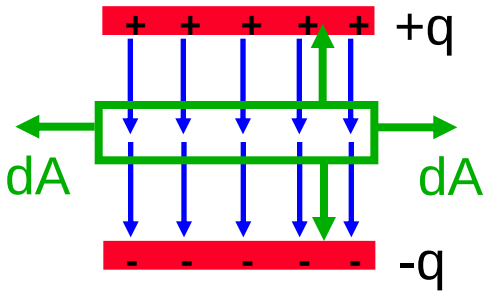
Durch Ausnutzen der Symmetrie erlaubt der Satz von Gauß oft (wenn keine Punktladungen vorliegen) eine **einfachere Berechnung** des E-Feldes als über vektorielle Addition aller Coulomb-Kräfte.

Beispiel 1:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q - q}{\varepsilon_0} = 0$$

Beispiel 2:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0$$

Netto fließt genau so viel Feld rein wie raus.

Oder:

Keine Ladung eingeschlossen, kein Fluss.

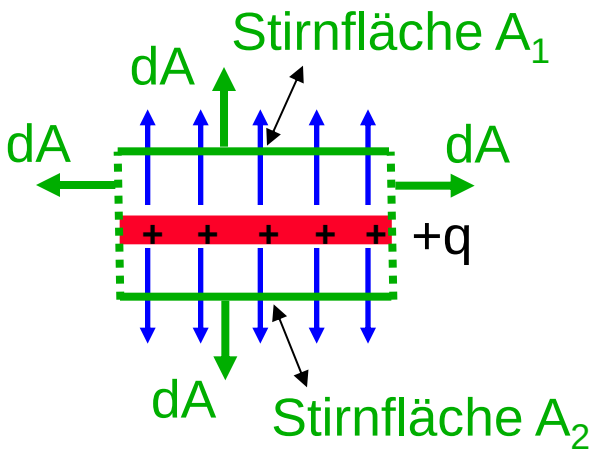
5.3 Elektrisches Feld: Satz von Gauß

Satz von Gauß

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Alle bei den positiven Ladungen beginnenden Feldlinien müssen durch die geschlossene Fläche A durchtreten.

Beispiel 3: **Einzelne geladene Platte**



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot (A_1 + A_2) + 0 = E \cdot 2A = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_+ = \frac{q}{2\varepsilon_0 A}$$

Flächenladungsdichte

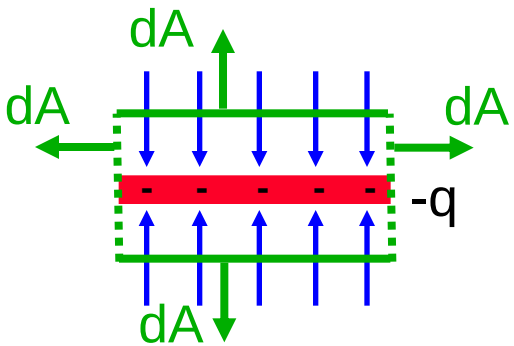
$\sigma = q / A = \text{const.}$

q > 0: E parallel A

d. h. E zeigt nach außen

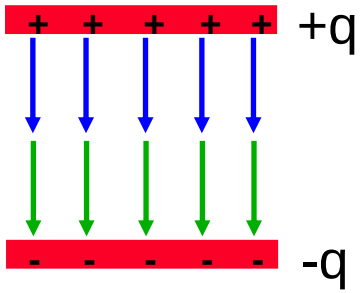
q < 0: E anti-parallel A

d. h. E zeigt nach innen



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = -E_- \cdot 2A = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$

E-Feld im Kondensator:



$$E = E_+ + E_- = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

✓

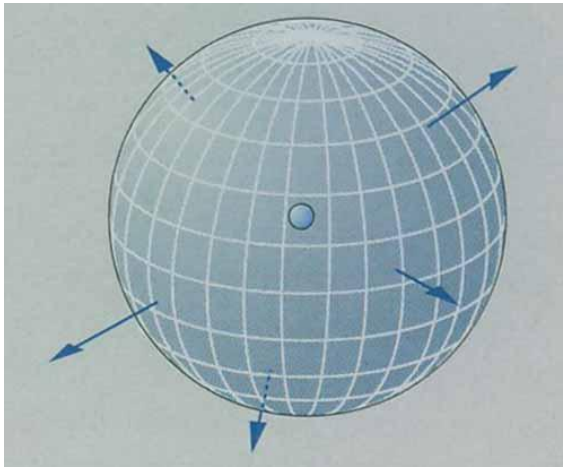
5.3 Elektrisches Feld: Satz von Gauß

Satz von Gauß

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Alle bei den positiven Ladungen beginnenden Feldlinien müssen durch die geschlossene Fläche A durchtreten.

Beispiel 4: **E-Feld einer Punktladung q** (bei r=0)



Auf einer Kugelschale um q hat das E-Feld überall den selben Betrag und steht überall senkrecht auf dA.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot \oint dA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

q > 0: E parallel A
d. h. E zeigt nach außen
q < 0: E anti-parallel A
d. h. E zeigt nach innen

Das Coulomb-Gesetz folgt aus dem Satz von Gauß.

$$\Rightarrow F = q_1 E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q}{r^2}$$

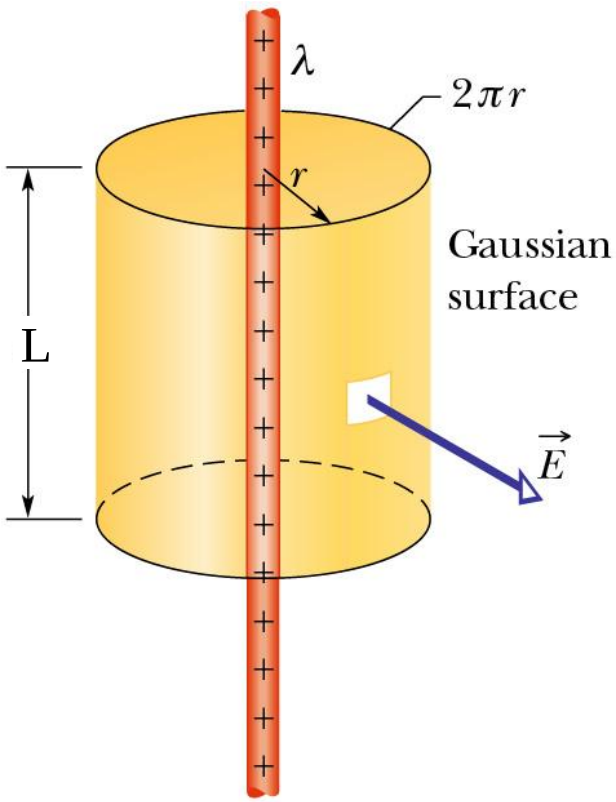
5.3 Elektrisches Feld (28): Satz von Gauß

Satz von Gauß

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Alle bei den positiven Ladungen beginnenden Feldlinien müssen durch die geschlossene Fläche A durchtreten.

Beispiel 5: **E-Feld einer homogenen linearen Ladungsverteilung q/h**



Symmetrie (umdrehen des Stabes hat keine Auswirkung)

➔ E-Feld steht senkrecht auf Zylindermantel und hängt nur vom radialen Abstand r ab

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 + E \cdot \oint dA_{Mantel} = E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Stirnflächen: $E \perp dA$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{q/L}{r}$$

homogene lineare Ladungsverteilung $\lambda = q/L$, d.h. der Draht trägt auf der Länge L die Ladung q

vgl. S. 14

5.3 Elektrisches Feld (14)

Lineare Ladungsverteilung, Blitz

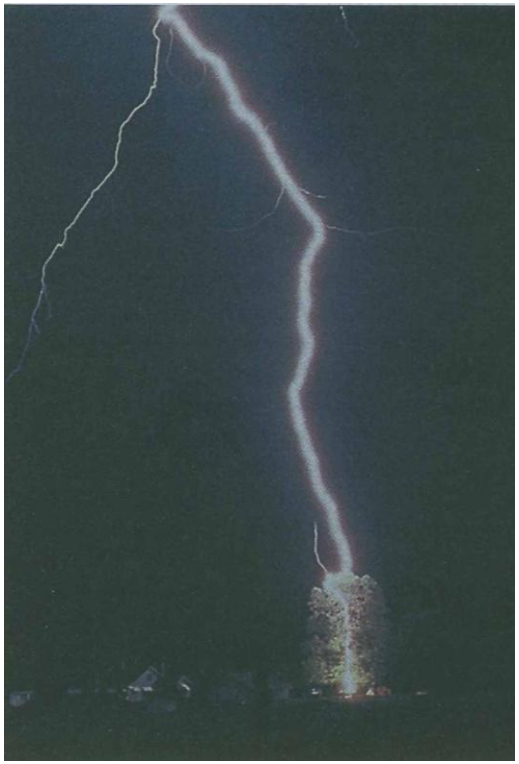
Bei einem Blitz baut sich eine „Säule“ von Elektronen zw. Wolke und Erde auf.

Das Feld eines unendlich langen, linearen Drahtes mit einer homogenen Ladungsverteilung (**q / L = const**) beträgt und steht radial auf dem Draht.

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q/L}{r}$$

vgl. S. 28

Typischer Wert für einen Blitz: q / L = 0.001 C/m



Das helle Leuchten entsteht durch Stöße zw. den beschleunigten Elektronen und Luftmolekülen, die dabei ionisiert werden.

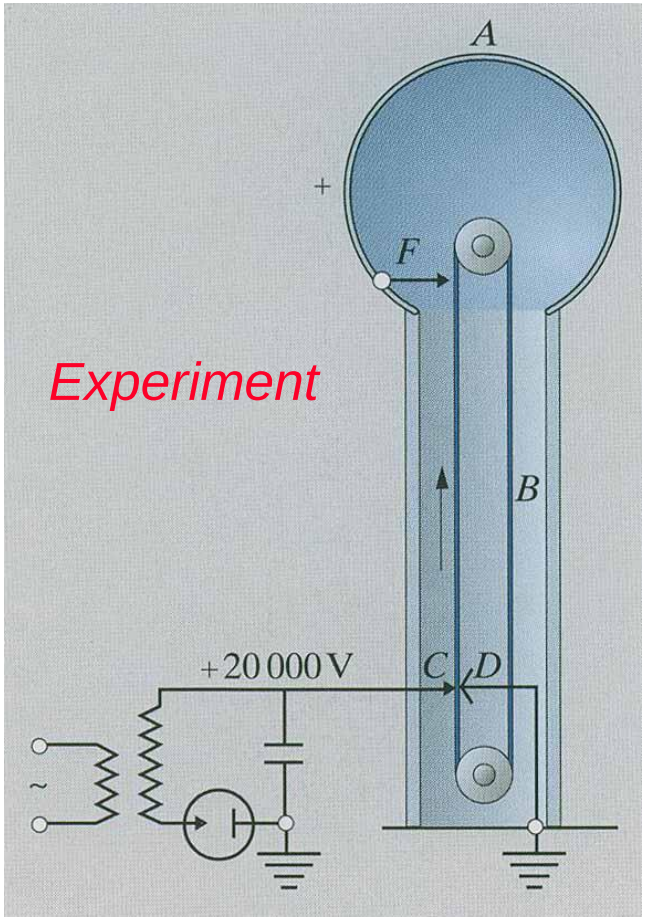
Kritische Feldstärke für den elektrischen Durchbruch von Luft: $\mathbf{E_{krit} = 3 \cdot 10^6\ N/C}$

$= 3 \cdot 10^6$ V/m = 30 kV/cm

Radius des Blitzes: $r = \dfrac{q/L}{2\pi\varepsilon_0 \cdot E_{krit}} \approx 6\text{m}$

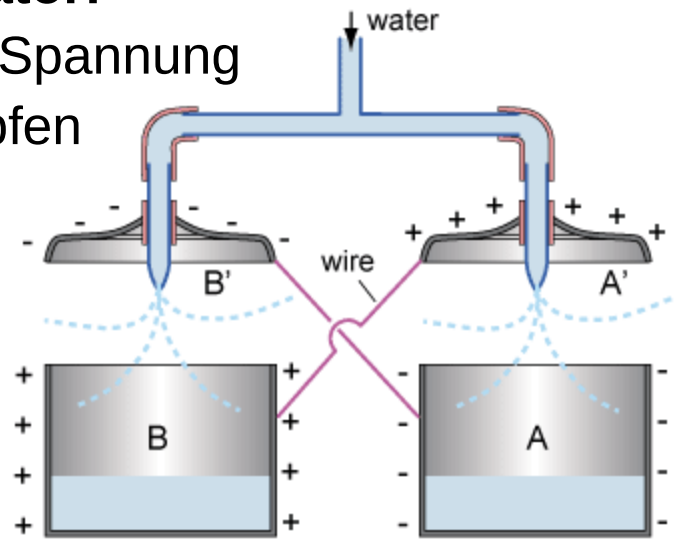
5.3 Elektrisches Feld (15)

„Blitz“ & elektrischer Durchbruch (E_{krit} = 30 kV/cm)



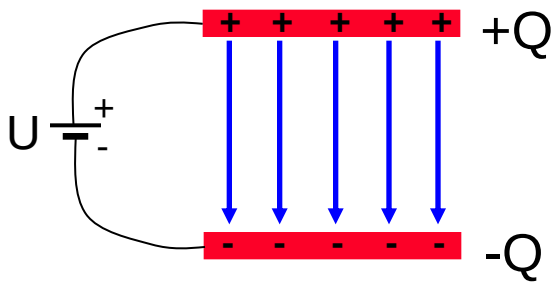
Erzeugung hoher E-Felder mit dem
van de Graaff-Generator:
Ladungen werden in C auf das Gummiband B übertragen, nach oben transportiert und in F auf die isolierte, leitende Hohlkugel A übertragen.
In A baut sich ein hohes Potential auf.

Kelvin-Generator:
Erzeuge hohe Spannung mit Wassertropfen



5.3 Elektrisches Feld: Kondensator

Im Kondensator gespeicherte Energie

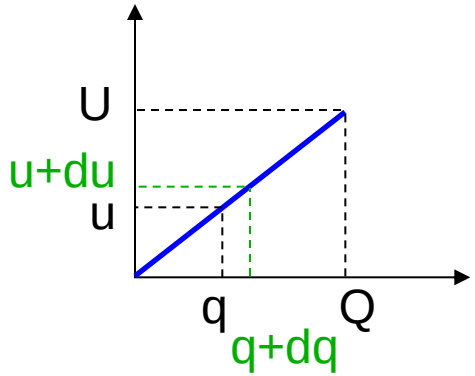


Nach Anschluss einer Batterie fließt Ladung auf den Kondensator.

Frage: Wo bleibt die potentielle Energie ?

Antwort: Die sich abstoßenden, gleichnamigen Ladungen auf einer Platte haben eine hohe potentielle Energie.

Moderne Sichtweise: Energie steckt im E-Feld.



Aufladevorgang:
Wenn schon die Ladung q und damit die Spannung u auf dem Kondensator ist, dann kostet das Aufbringen der zusätzlichen Ladung dq die Energie dW:

$$dW = dq \cdot u = dq\frac{q}{C} \Rightarrow W = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{C}\,\tfrac{1}{2}q^2\Big|_0^Q$$

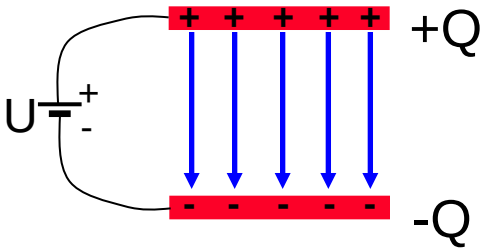
Analog zum Spannen einer Feder:
F ~ x, W = ½ D x^2

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU}$$

$C = Q/U$

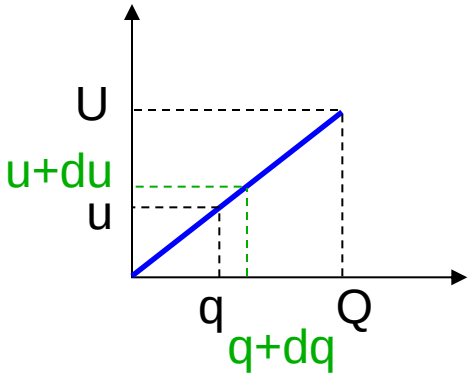
5.3 Elektrisches Feld: Kondensator

Energie



$$W = qU$$

falls U ≠ U(q),
d.h. U hängt nicht von der Probeladung q ab



$$W = \frac{1}{2} QU$$

falls U = Q / C

Analog zum Spannen einer Feder:
F ~ x, W = ½ D x^2

Energiedichte W/V

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \frac{A}{d}\right) E \cdot d^{\,2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 V E^2$$

$$\boxed{\Rightarrow w = W / V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

Die Energie steckt im Feld, bzw. wird für den Aufbau des Feldes benötigt.