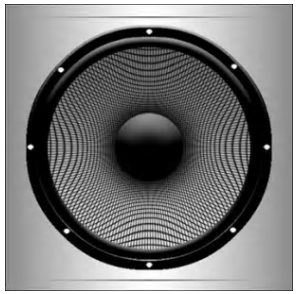
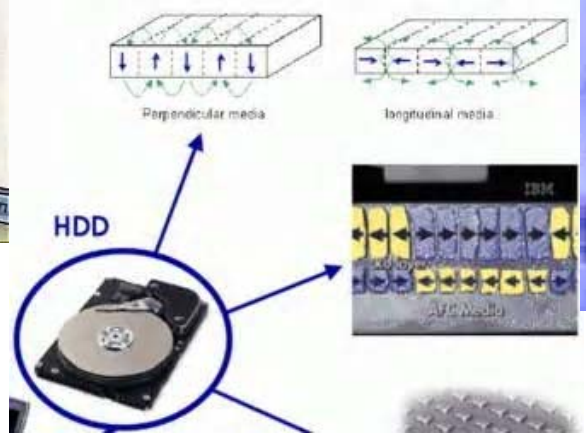
5.4 Magnetfeld

Magnetfelder im Alltag

Kompass, Kühlschrank-Magnete, Lautsprecher, Festplatte, Kernspin-Tomographie

Magnetit
Fe_3O_4





Permanentmagnete & Elektromagnete

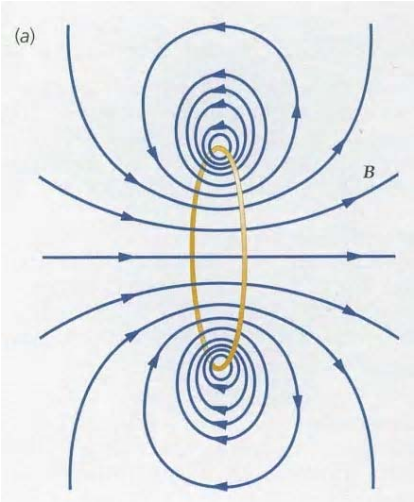
Nord	Süd

Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.

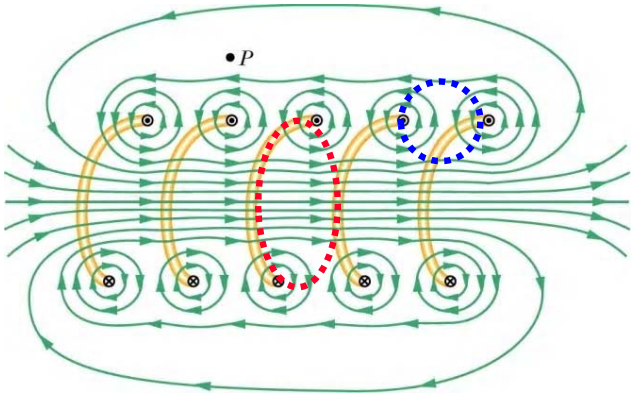
5.4 Magnetfeld: Spule

B-Feld einer stromdurchfloßenen (Zylinder-)Spule (Solenoid)

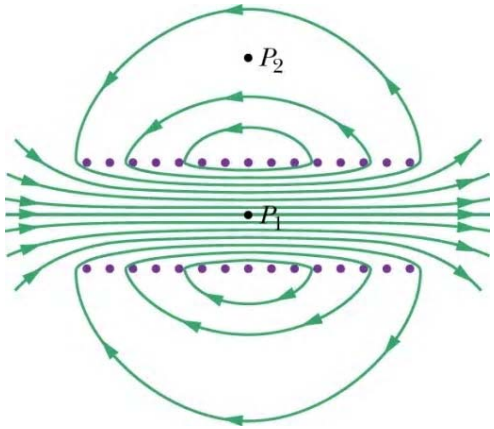
Leiterschleife

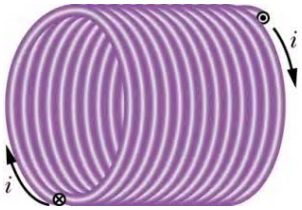


Spule = viele Schleifen



Reale Spule





s: Länge

d: Durchmesser

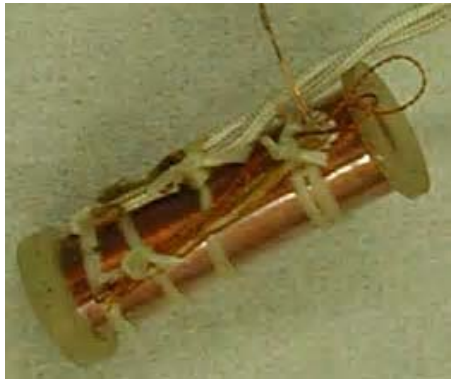
$$B = \mu_0 \cdot n \cdot I$$

n: Anzahl Windungen pro Meter

$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ T m/A

Im Inneren erzeugt eine Spule ein (fast) homogenes B-Feld (für s >> d).

Für s >> d ist B unabh. von s und d.
Vgl. Plattenkondensator, homogenes E-Feld



Bsp.:

I = 1A; n = 3000 / 5 cm

➔ B ~ $75 \cdot 10^{-3}$ T

Induktivität:

$$L = \frac{N \cdot \phi}{I}$$

$$= \frac{N \cdot B \cdot A}{I}$$

$$= \frac{N \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot A}{I}$$

$$= N \mu_0 n \cdot A$$

$$= \mu_0 n^2 \cdot s \cdot A$$

homogenen Felds

$$\phi = B \cdot A$$

lange Spule: $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$

$$n = \frac{\#\ \text{Windungen}}{\text{Strecke}}$$

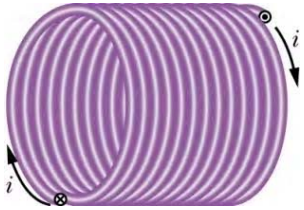
$$= N/s$$

5.4 Magnetfeld: Induktivität

Induktivität L einer Zylinder-Spule

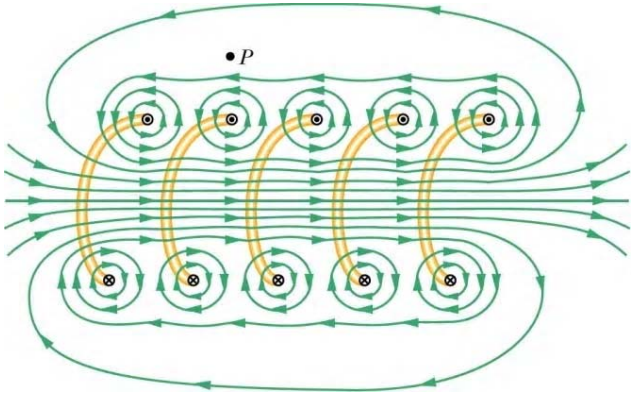
$$L = \frac{\Phi_{ges}}{I} = \frac{N \cdot \Phi}{I}$$

Einheit L:
1 T m² / A
= 1 H (Henry)



N: Anzahl Windungen
N•Φ: Gesamt-Fluss

Wie groß ist der magn. Fluss durch alle Schleifen der Spule bei einem gegebenen Strom ?



Vgl. Kapazität C
(Fassungsvermögen)
eines **Kondensators:**

$$C = q / U$$

Wie viel Ladung trägt der Kondensator bei einer gegebenen Spannung U ?

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Induktivität einer langen Zylinderspule:

$$N \cdot \Phi = (n \cdot s)(B \cdot A)$$

$$B = \mu_0 \cdot n \cdot I$$

$$\Rightarrow L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot s \cdot A$$

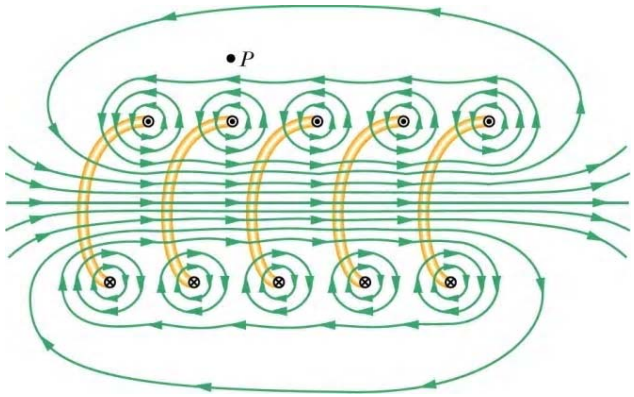
n=N/s: Anzahl Windungen pro Länge s

Die Induktivität L hängt nur von der Geometrie ab (wie C auch).

L ~ n²:
mit n wächst sowohl
B als auch A_{gesamt}

5.4 Magnetfeld: Selbstinduktion

Selbstinduktion



Änderung des Stromes durch die Spule
➔ Änderung des durch die Spule erzeugten B-Feldes
➔ Änderung des Flusses Φ durch die Spule
➔ Induktion einer Spannung in der Spule

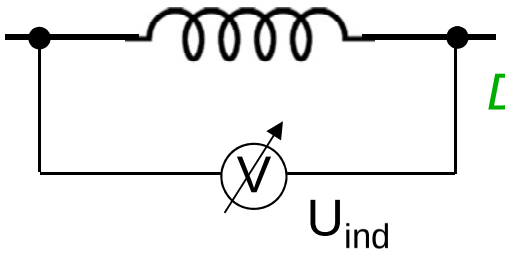
Solange sich der Strom durch eine Spule **ändert**, wird in der Spule durch **Selbstinduktion** eine Spannung induziert.

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi_{ges}}{dt}$$

$$\Phi_{ges} = L \cdot I$$

$$\Rightarrow U_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$$

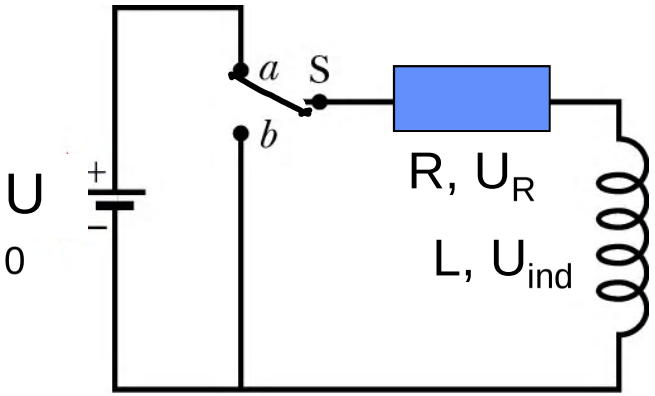
Minus-Zeichen:
Lenzsche Regel



***In** der Spule ist das Potential nicht definiert (veränderliches B-Feld ➔ induziertes E-Feld).*
*Die Spannung U_{ind} über der Spule wird **außerhalb des B-Feldes** gemessen; dort ist das Potential definiert.*

5.4 Magnetfeld: RL-Kreis

Anschaltverhalten einer Spule



$$U_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$$

Maschenregel: $U_0 + U_{ind}(t) = U_R$

$$U_0 - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = R \cdot I \quad (*)$$

DGL: $$\boxed{\frac{dI(t)}{dt} = \{U_0 - R \cdot I\} / L}$$

Lösung: $$\boxed{I(t) = \frac{U_0}{R}\{1 - \exp(-t \cdot R / L)\}}$$

Zeitkonstante $\tau = L / R$

Zunächst ist die Spule wie eine Unterbrechung, dann wie ein Kurzschluss.

Entladen eines Kondensators

$$U_C(t) = U_0 \exp(-t / RC)$$

Laden eines Kondensators

$$U_C(t) = U_0 \{1 - \exp(-t / RC)\}$$

Ausschaltverhalten einer Spule

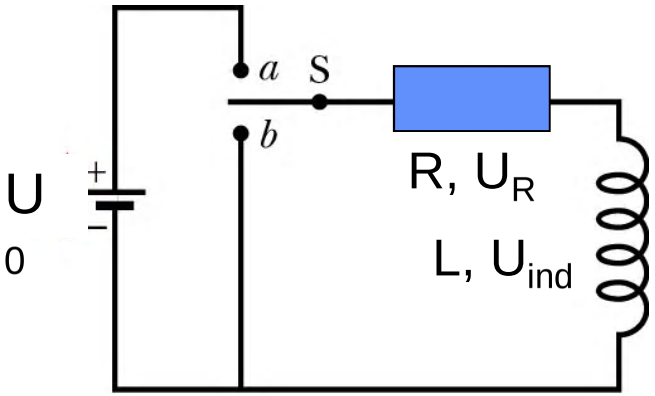
$$0 - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = R \cdot I$$

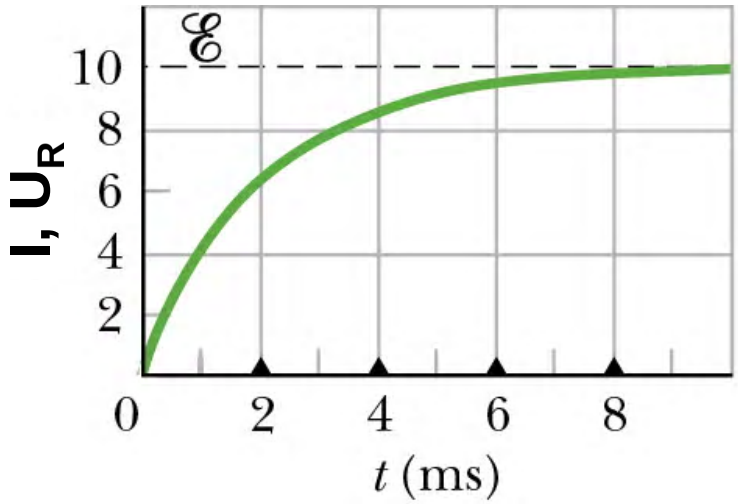
$$\boxed{\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot I}$$

$$\boxed{I(t) = \frac{U_0}{R} \exp(-t \cdot R / L)}$$

5.4 Magnetfeld: RL-Kreis

Anschaltverhalten einer Spule

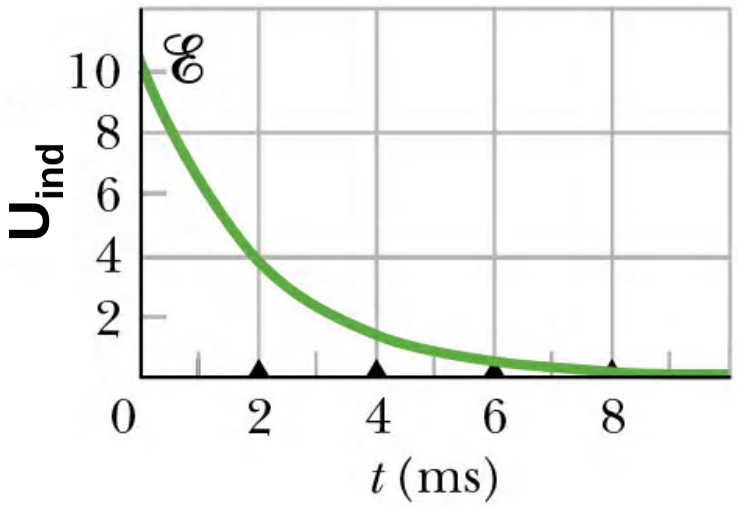




(a)

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\{1 - \exp(-t \cdot R / L)\}$$

Zeitkonstante
$\tau = L / R$



(b)

Eine Spule wirkt einer Änderung des sie durchfließenden Stromes zunächst entgegen (gilt für An- und Ausschalten).

Im stationären Fall (keine Änderung) entspricht sie einem Kurzschluss (gewöhnliche Leitung).

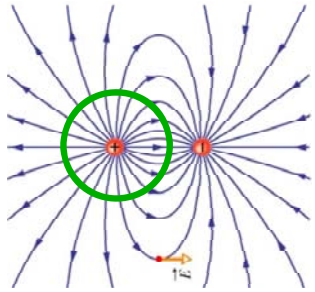
5.4 Magnetfeld: Zusammenfassung(1)

Die 4 **Maxwell-Gleichungen** sind formale Grundlage des Elektromagnetimus und der Optik.

Satz von Gauß für statische E-Felder (9,16):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

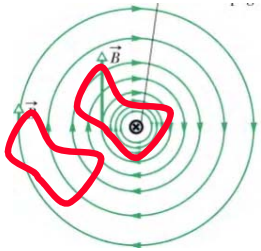
(Statische) Ladungen erzeugen (statische) E-Felder.



Satz von Gauß für B-Felder (17):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

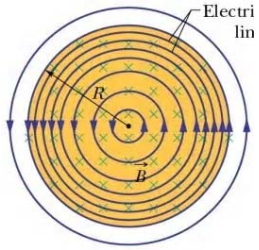
B-Felder sind Wirbelfelder, es gibt keine magn. Monopole (q_{mag}=0).



Faraday-Gesetz (16):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Änderungen des magn. Flusses erzeugen induzierte E-Felder; I_{mag}=0



Ampere-Maxwell'sches Gesetz (9,20):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I$$

Änderungen des elektr. Flusses und/oder Ströme erzeugen B-Felder.

5.4 Magnetfeld: Zusammenfassung(2)

Es gibt **elektrische Monopole (Ladung +, -),** aber **keinen magnetischen Monopol.**

Das einfachste magnetische System ist ein **Dipol.**

	E-Feld (Elektrostatik)	**Magnetisches Feld**
erzeugt durch	**Ladungen**	**bewegte Ladungen (Ströme)**
Kraft auf	**Ladungen**	**bewegte Ladungen (Ströme)**
	F || E	**F ⊥ B**
Feldlinien	**beginnen bei +, enden bei -**	**sind geschlossen**

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \qquad \vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin\varphi \qquad F = I \cdot \ell \cdot B \cdot \sin\varphi$$

Richtung: Rechte-Hand-Regel

Einheit B: 1 Vs / m² = 1 T (Tesla)

5.4 Magnetfeld: Zusammenfassung(3)

Vakuumpermeabilität:
$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ T m/A

Feld eines stromführenden **Drahtes**: $B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$

Parallele Ströme ziehen sich an, antiparallele stoßen sich ab: $F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{LI_aI_b}{d}$

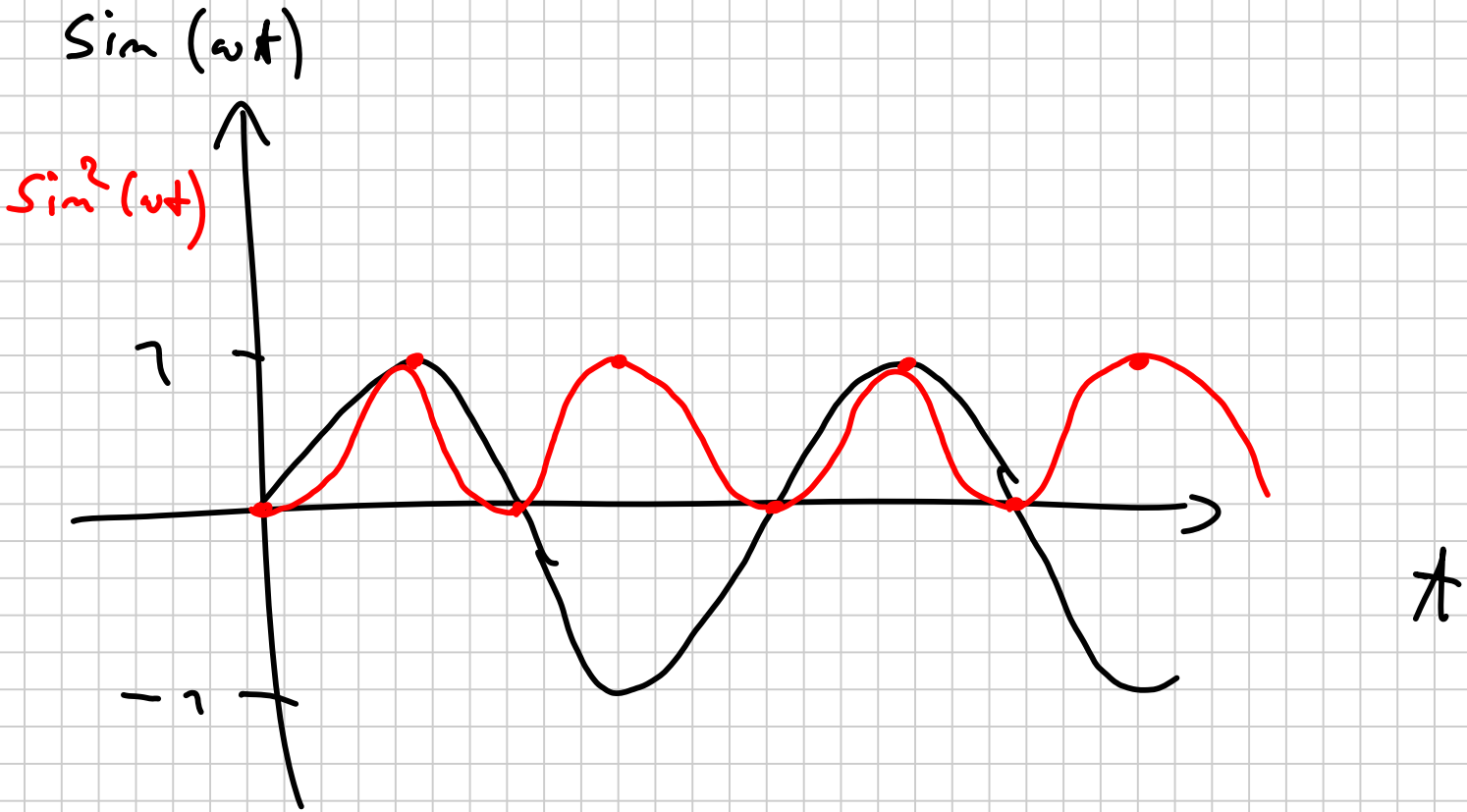
Dipolmoment einer Leiterschleife: $|\vec{\mu}| = N \cdot I \cdot A$

Im homogenen Feld wird ein Dipol parallel zum Feld ausgerichtet. $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

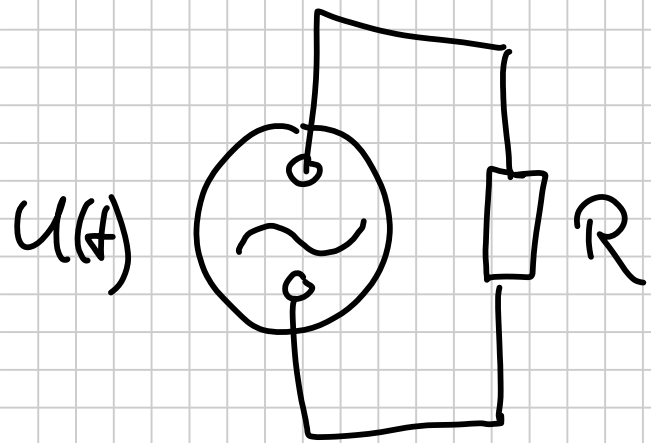
Feld einer **Zylinderspule**: $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$ (homogen für Länge >> Durchmesser)

Senkrecht zum **homogenen B-Feld** bewegt sich ein Elektron auf einer **Kreisbahn**.

Kreisfrequenz: $\omega = qB/m$


Sin (ωt)
Sin²(ωt)
1
-1
t

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$$



$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \sin(\omega t)$$

$$P(t) = U(t) \cdot I(t)$$

$$= U_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{U_0}{R} \sin(\omega t)$$

$$= \frac{U_0^2}{R} \cdot \left(\sin(\omega t)\right)^2$$

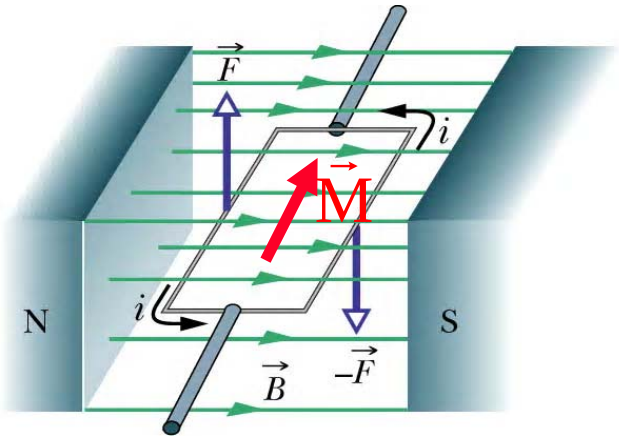
5.5 Wechselstrom

Wechselspannung

Drehung einer Leiterschleife im B-Feld induziert eine oszillierende Spannung:

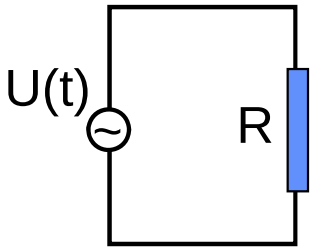
(Kap. 5.4 (18), $\varphi(t) = \omega\, t$)

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



Netzspannung im Haushalt: $U_{eff} \sim 230$ V, $\omega = 2\pi\ 50$ Hz

Leistung am Lastwiderstand



$$I(t) = U(t)/R = \frac{U_0}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

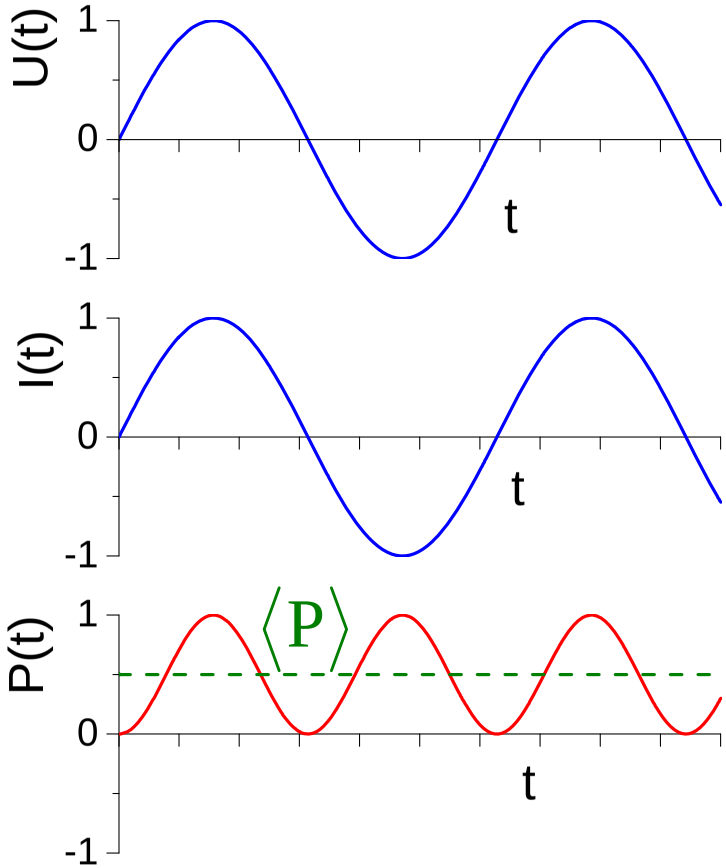
$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \frac{U_0^2}{R} \cdot \left(\sin(\omega \cdot t)\right)^2$$

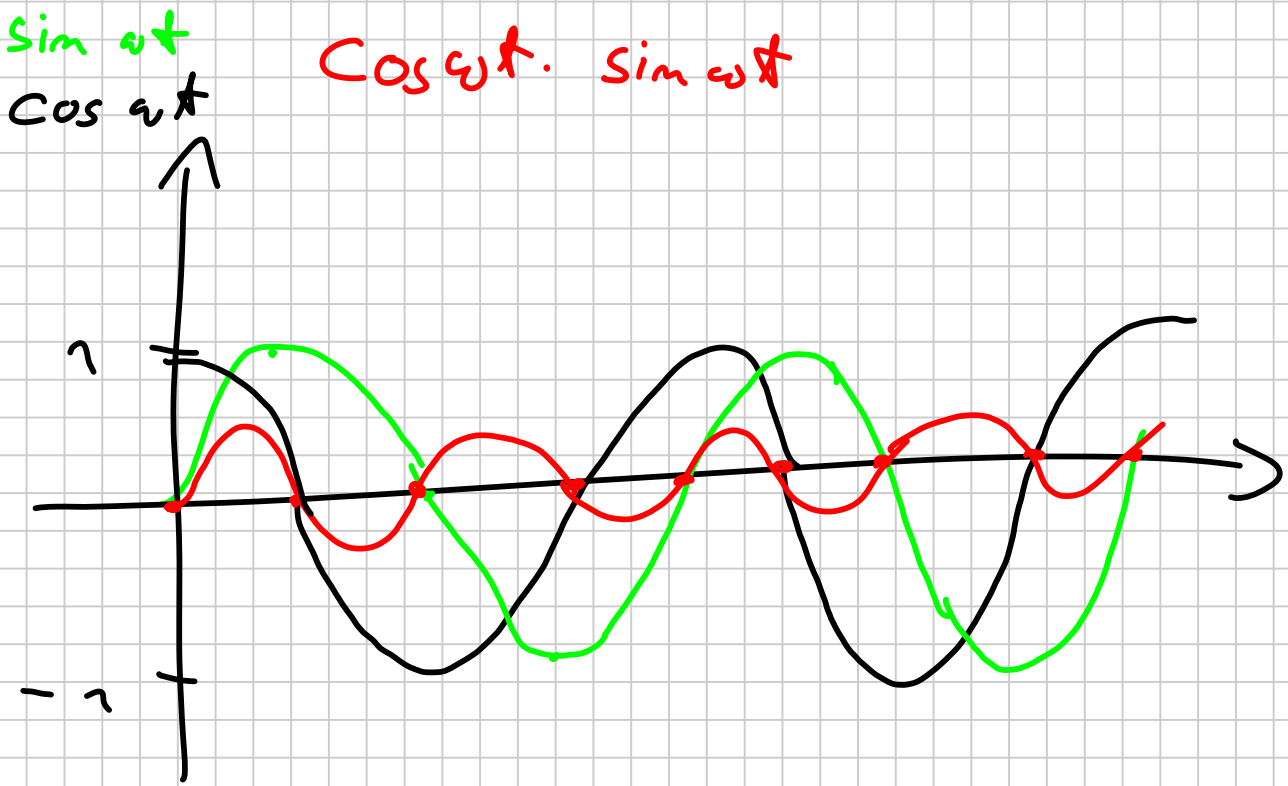
Mittelwert: $\left\langle \left(\sin(\omega \cdot t)\right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{U_0^2}{2R} = \frac{U_{eff}^2}{R}$$

In R erzeugt $U(t)=U_0 \sin(\omega t)$ die gleiche Wärme wie die Gleichspannung U_{eff} = const

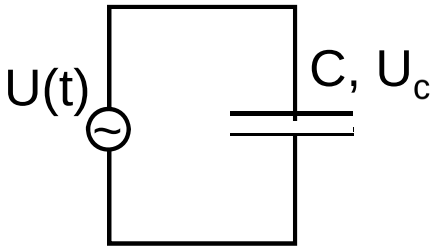
$$\Rightarrow \frac{U_0}{\sqrt{2}} = U_{eff}$$




sin ωt
cos ωt
cos ωt · sin ωt
1
-1

5.5 Wechselstrom

Blindleistung am kapazitiven Widerstand



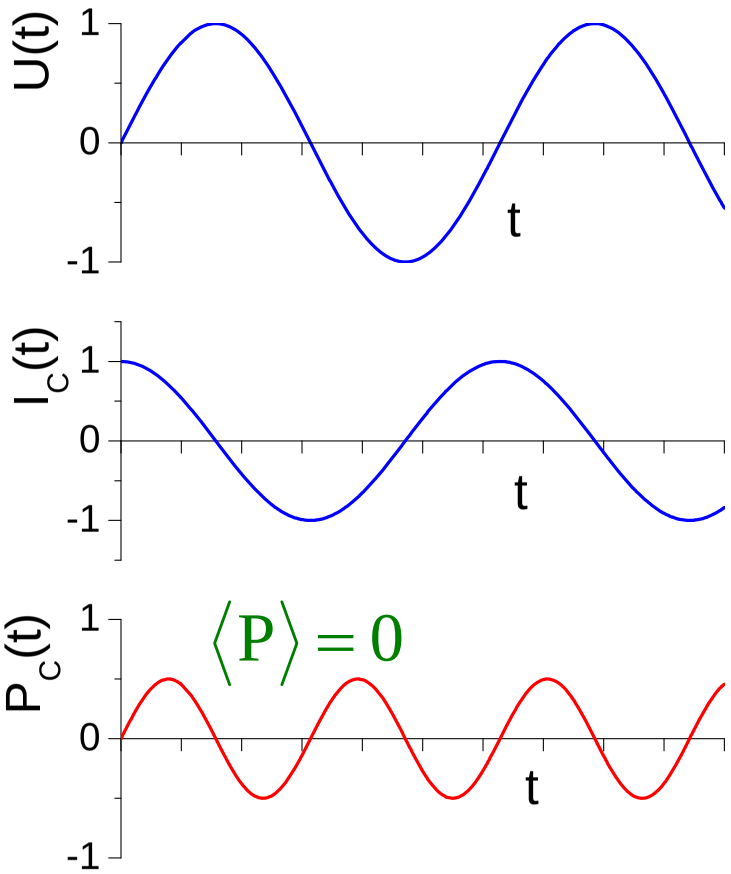
$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$q(t) = C \cdot U(t)$$

Vgl. (Ent-)Laden eines Kondensators:
Kondensator leer, U = 0 ➔ I groß;
Kondensator voll, U = U_0 ➔ I = 0;
➔ Strom groß, wenn Spannung klein, und umgekehrt

$$\Rightarrow I(t) = \frac{dq}{dt} = \omega C \cdot U_0 \cos(\omega t) = I_0 \sin\left(\omega t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

U(t) & I(t) sind um 90° ($\pi/2$) phasenverschoben;
der Strom eilt der Spannung voraus.



$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \omega C U_0^2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = 0$$

Im Mittel ist die Leistung 0, die Energie pendelt zw. Quelle und Kondensator.
Der verlustfreie (P=0) Strom heißt **Blindstrom**.

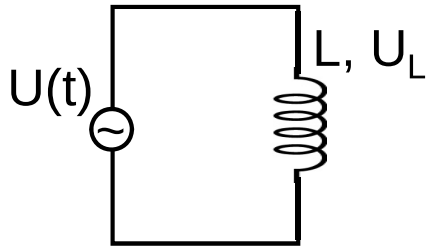
Kapazitiver Widerstand (Einheit: 1 Ω)

$$R_C = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

ω = 0: Unterbrechung;
ω groß: Kondensator lässt Strom durch

5.5 Wechselstrom

Blindleistung am induktiven Widerstand



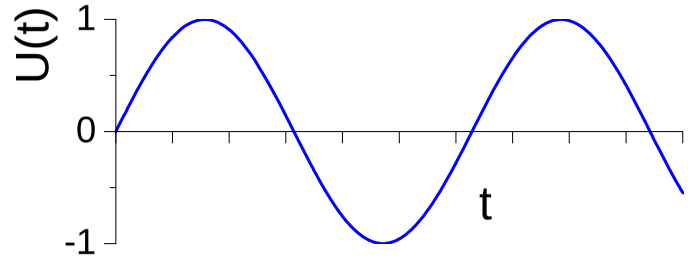
$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$U(t) = -U_{ind} = L \cdot \frac{dI(t)}{dt}$$

Vgl. Anschalten einer Spule:
zu Beginn U_{ind} groß ➔ $I = 0$;
später $U_{ind} = 0$ ➔ I groß;
➔ Strom groß, wenn Spannung klein, und umgekehrt

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U}{L} sin(\omega t) \Longrightarrow I(t) = -\frac{U}{\omega L} cos(wt) \Longrightarrow I(t) = I_0 sin(wt - \frac{\pi}{2})$$

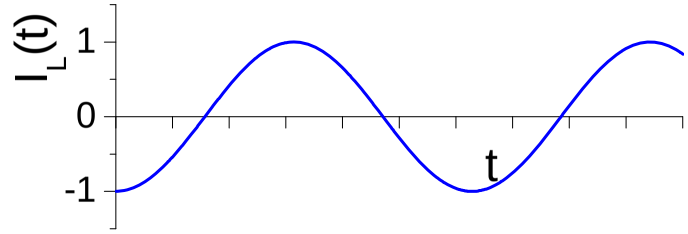
U(t) & I(t) sind um 90° ($\pi/2$) phasenverschoben;
der Strom hinkt der Spannung hinterher.



$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \omega L \cdot I_0^2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = 0$$

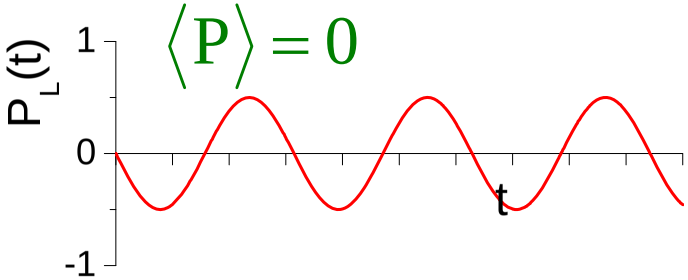
Im Mittel ist die Leistung 0, die Energie pendelt zw. Quelle und Spule.
Der verlustfreie (P=0) Strom heißt **Blindstrom**.



Induktiver Widerstand (Einheit: 1 Ω)

$$R_L = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0} = \omega L$$

ω groß: Unterbrechung;
$\omega = 0$: Spule lässt Strom durch

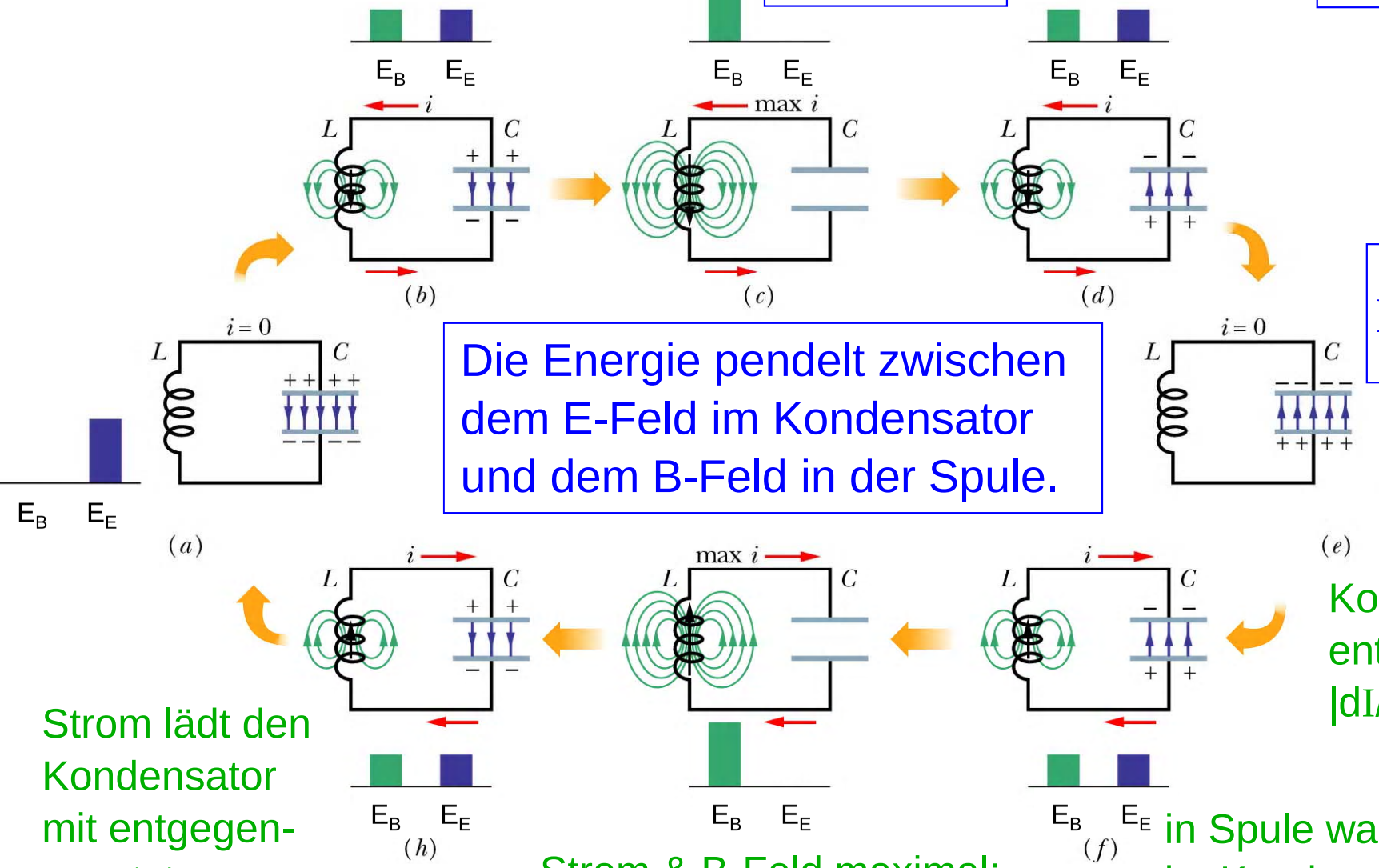


5.5 Wechselstrom

LC-Schwingkreis

$$E_B = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

$$E = E_E + E_B = \text{const}$$



$$E_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Die Energie pendelt zwischen dem E-Feld im Kondensator und dem B-Feld in der Spule.

Kond. voll geladen; entlädt sich mit $|dI/dt| = U / L$

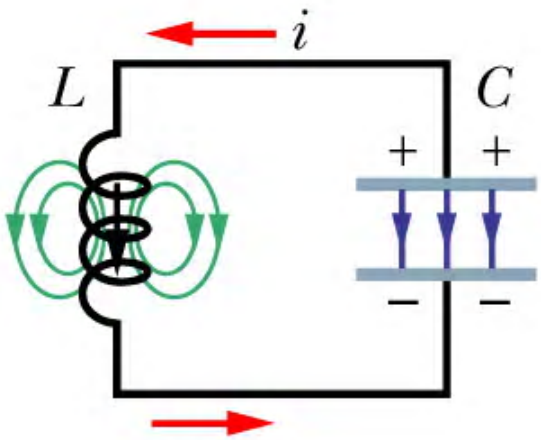
in Spule wachsen Strom & B-Feld; im Kond. werden Q und E-Feld kleiner

Strom & B-Feld maximal; Kondensator leer

Strom lädt den Kondensator mit entgegen-gesetzter Polung

5.5 Wechselstrom

LC-Schwingkreis



$$U_C(t) = U_L(t)$$

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{q(t)}{C} + L\frac{dI(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q(t)}{C} + L\frac{d^2(q(t))}{dt^2} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d^2q(t)}{dt^2} = -\frac{1}{LC}q(t)}$$

$$q(t) = A\sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

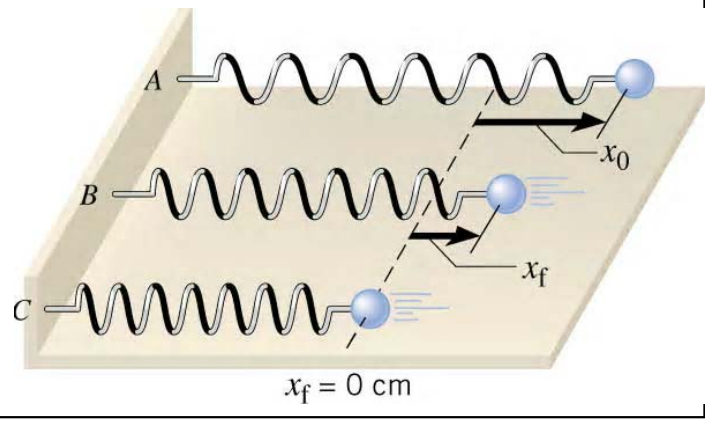
Im LC-Kreis schwingt die Ladung sinusförmig mit der Kreisfrequenz ω.

Federpendel (Kap. 2.2.4)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m}x(t)$$

$$x(t) = A\sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{D/m}$$



Analogie:

U_c bzw. q ⇔ Auslenkung x

Strom I ⇔ Geschwindigkeit v

E-Feld: $E_E = ½\, q^2/c$ ⇔ $E_{pot} = ½\, D\, x^2$

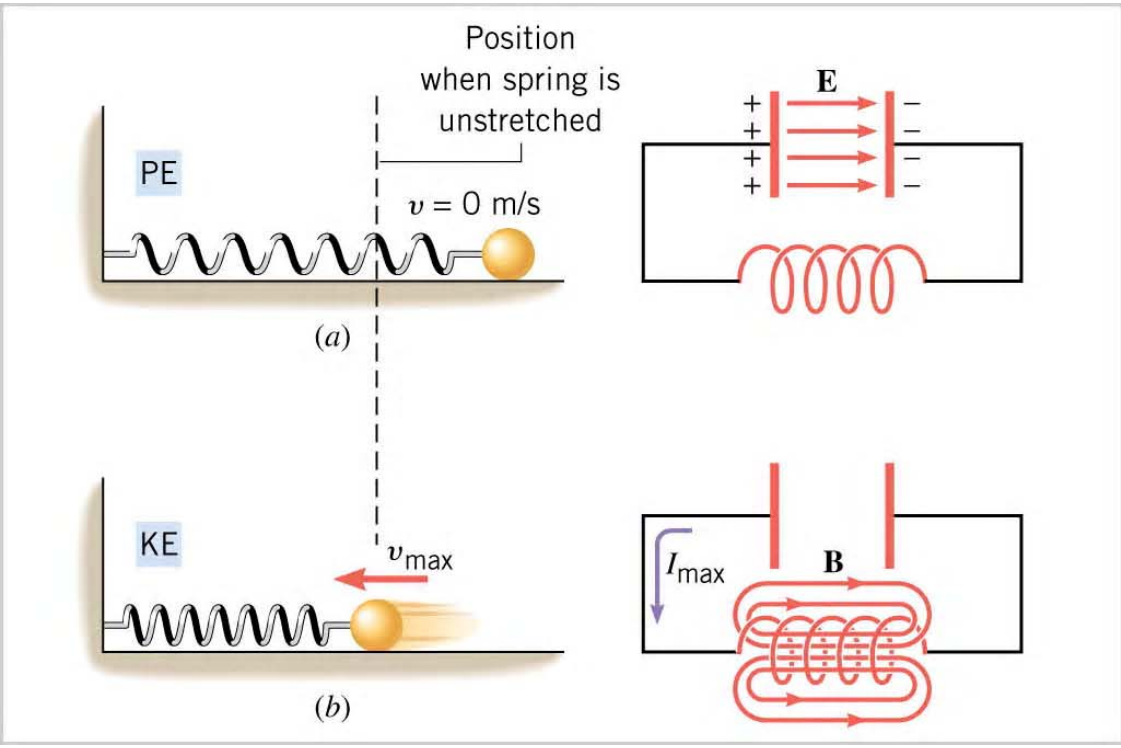
B-Feld: $E_B = ½\, L\, I^2$ ⇔ $E_{kin} = ½\, m\, v^2$

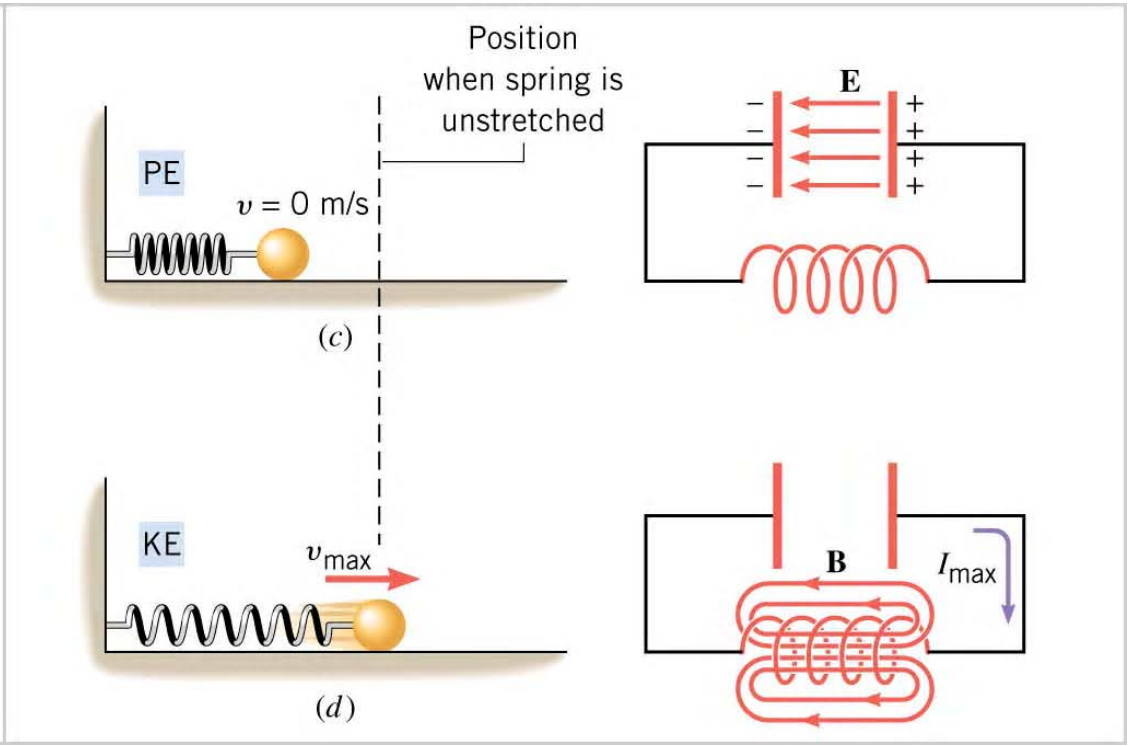
5.5 Wechselstrom

LC-Schwingkreis

E_E analog zu E_{pot}

$$E_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$





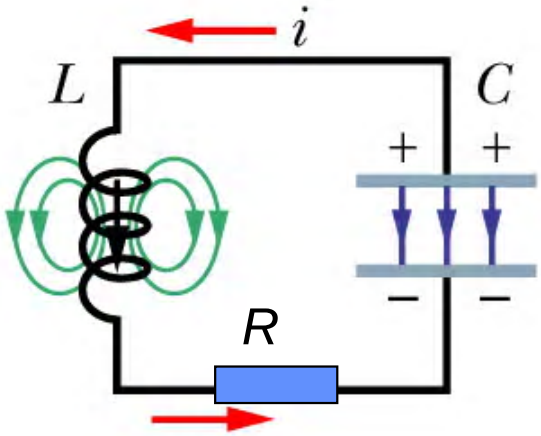
E_B analog zu E_{kin}

$$E_B = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

$$E = E_E + E_B = \text{const}$$

5.5 Wechselstrom

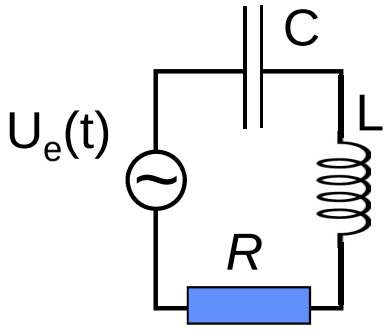
RLC-Kreis: gedämpfte Schwingungen



Im Widerstand wird Wärme erzeugt,
der RLC-Kreis führt eine **gedämpfte Schwingung** aus.

Weiterer Mechanismus der Dissipation (auch für R=0):
Energie wird mit elektromagn. Wellen abgestrahlt.

Erzwungene Schwingungen



Durch die äußere periodische Spannung $U_e(t) = U_0 \cos(\omega_e t)$
mit beliebiger Frequenz ω_e wird der RLC-Kreis zu Schwingungen
mit ω_e angeregt (s. Kap. 2.2.4).

Wechselstromwiderstand: Impedanz Z

$$\boxed{U_0 = Z \cdot I_0} \qquad Z^2 = R^2 + (R_L - R_C)^2 = R^2 + \left(\omega_e L - \frac{1}{\omega_e C}\right)^2$$

Resonanz (maximale Amplitude I_0): Z wird minimal (Z ~ R) für $\omega_e L = 1/\omega_e C$,
d.h. wenn ω_e nahe bei der Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{1/LC}$ des Schwingkreises liegt.

Bsp.: Einstellung eines Radio- oder TV-Senders

5.5 Wechselstrom: Zusammenfassung

Wechselspannung
(z.B. induziert durch Drehung einer Leiterschleife im B-Feld)

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Leistung am Lastwiderstand

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \frac{U_0^2}{R} \cdot \left(\sin(\omega \cdot t)\right)^2$$

Mittelwert

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{U_0^2}{2R} = \frac{U_{eff}^2}{R}$$

mit

$$\Rightarrow \frac{U_0}{\sqrt{2}} = U_{eff}$$

Induktiver Widerstand

$$R_L = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0} = \omega L$$

I hinkt U um 90° hinterher

kapazitiver Widerstand (Einheit: 1 Ω)

$$R_C = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

I eilt U um 90° voraus

Eigenfrequenz des (ungedämpften) LC-Schwingkreises

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Wechselstromwiderstand:
(Gedämpfte erzwungene Schwingungen im RLC-Kreis)

-> Impedanz Z

$$U_0 = Z \cdot I_0$$

$$Z^2 = R^2 + \left(R_L - R_C\right)^2 = R^2 + \left(\omega_e L - \frac{1}{\omega_e C}\right)^2$$