Universität zu Köln

II. Physikalisches Institut

Festkörperphysik 25. Mai 2008

M. Braden, E. Benckiser, A.C. Komarek

6. Übung

Aufgabe 22.(15 Punkte) Betrachten Sie bosonische Anregungen mit einer Dispersion der Form $\omega = c \cdot k^n$ in einem D–dimensionalen Kristall.

(a) Zeigen Sie, daß die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme C für $T \to 0\text{K}$ durch $C \propto T^{D/n}$ gegeben ist.

(b) Für $k \to 0$ ist die Spinwellendispersion eines Antiferromagneten linear ($\omega = ck$) und die eines Ferromagneten quadratisch ($\omega = ck^2$). Geben Sie die Tieftemperaturabhängigkeiten von C für 1–, 2– und 3–dimensionale Systeme an.

Aufgabe 23.(10 Punkte) Betrachten Sie statt des einfachen harmonischen Potenzials zwischen nächsten Nachbarn das Potenzial

$$U(x) = cx^2 - gx^3 \text{ mit } c, g > 0 \text{ und } g \ll c\,,$$

wobei x die Differenz der Auslenkungen nächster Nachbarn bezeichnet. Berechnen Sie hierfür die thermische Ausdehnung, d.h. den Mittelwert $\langle x(T) \rangle$

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x e^{-\beta U(x)}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\beta U(x)}} \qquad \text{mit} \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

(Benutzen Sie die Entwicklung $e^{\beta g x^3} \simeq 1 + \beta g x^3 + \ldots$.)

Aufgabe 24.(10 Punkte) Zustandsdichten von Phononen-Zweigen:

(a) Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte einer monoatomaren Kette mit N Atomen im Abstand a mit Nächste-Nachbar-Wechselwirkung f gegeben ist durch:

$$D(\omega) = \frac{2N}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\omega_{max}^2 - \omega^2}},$$

mit ω_{max} der maximalen Frequenz.

(b) Es sei der optische Phononenast in drei Dimensionen gegeben durch $\omega(k) = \omega_0 - Ak^2$. Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte $D(\omega)$ gegeben ist durch:

$$D(\omega) = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{A^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\omega_0 - \omega}, \quad \omega < \omega_0$$

und

$$D(\omega) = 0, \quad \omega > \omega_0\ .$$