II. Phys. Institut der Universität zu Köln

Oberseminar 2007

Materialien mit negativem Brechungsindex

Holger Ulbrich

Betreuer: Thomas Möller

Übersicht

1. Einführung: Brechungsindex

2. Theoretische Überlegungen V. Veselago

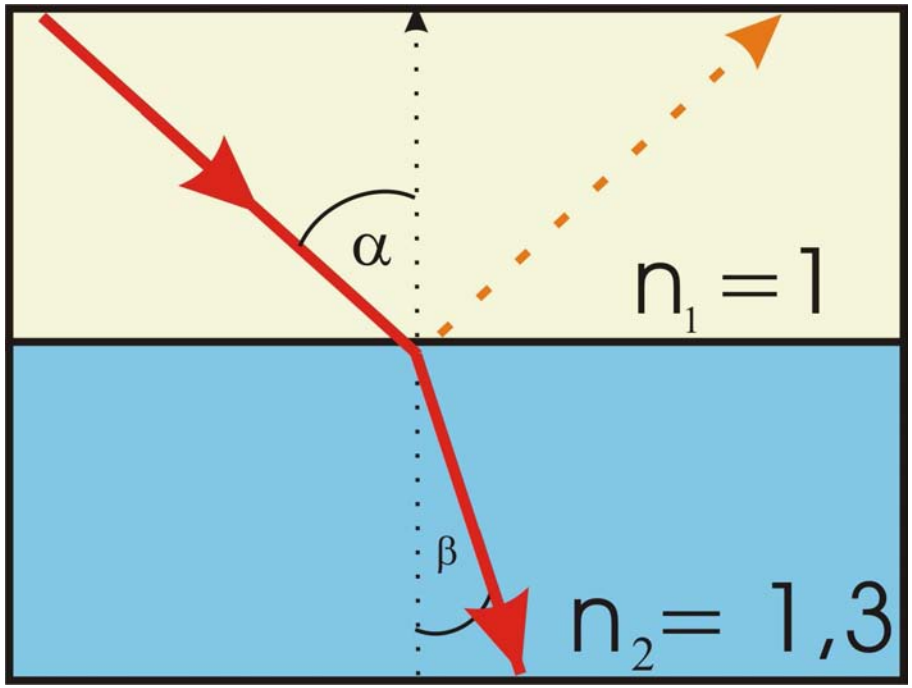
3. Herstellung von Linkshändigem Material :

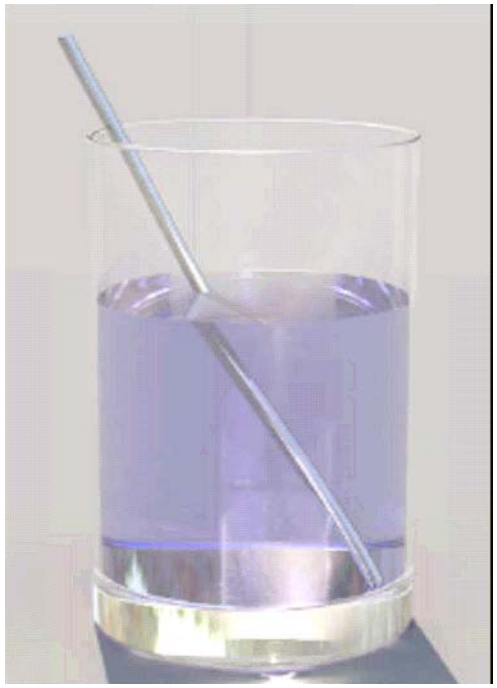
- Realisierung eines Material mit negativem ε
- Realisierung eines Material mit negativem μ
- Herstellung eines „Metamaterial“

4. Anwendungen

5. Zusammenfassung

Brechung in optisch dichteres Medium

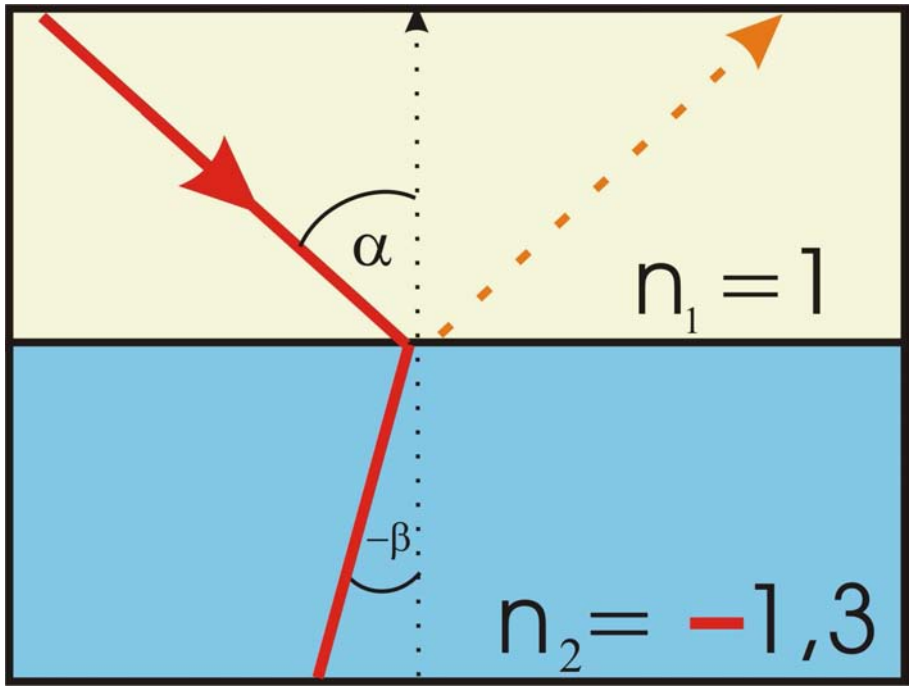


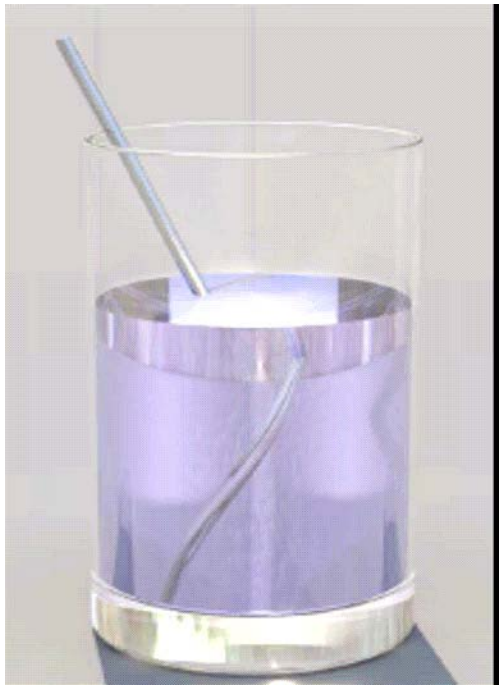


Snelliussches Brechungsgesetz $\frac{sin(\alpha)}{sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1}$

α: Einfallswinkel
β: Ausfallswinkel

Brechung in Medium mit n < 0



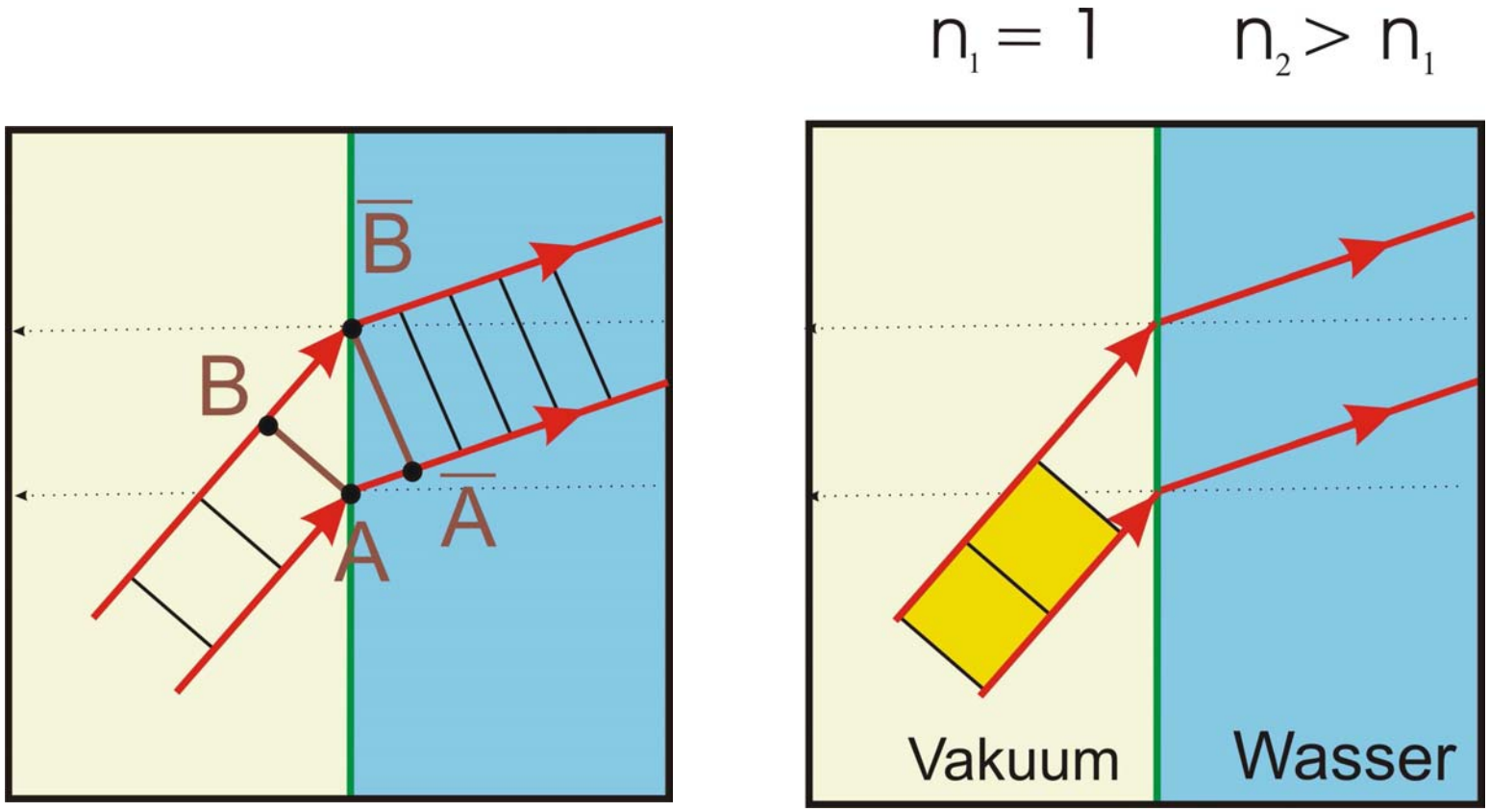


Snelliussches Brechungsgesetz

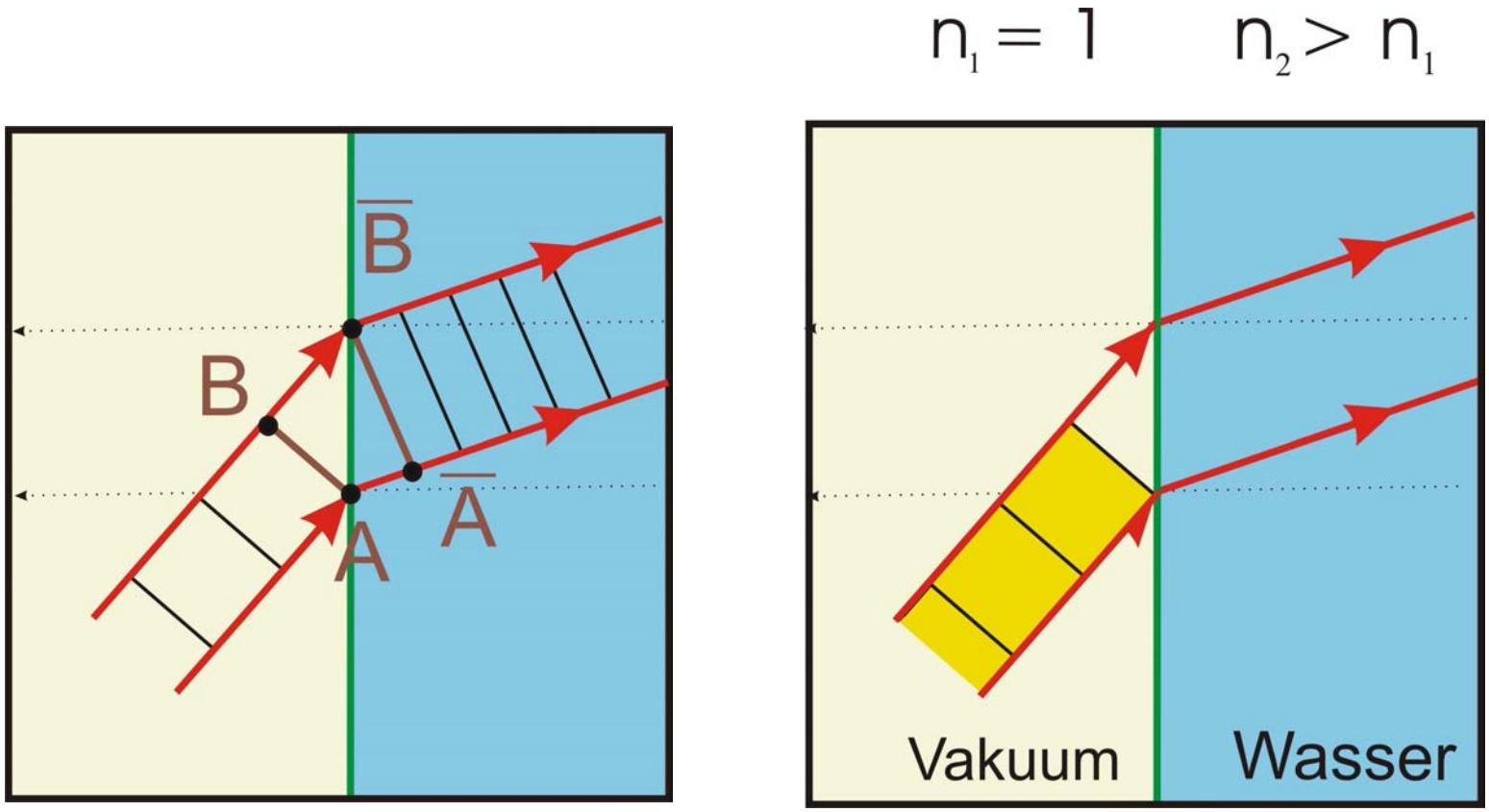
$$\frac{sin(\alpha)}{sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1}$$

α: Einfallswinkel
β: Ausfallswinkel

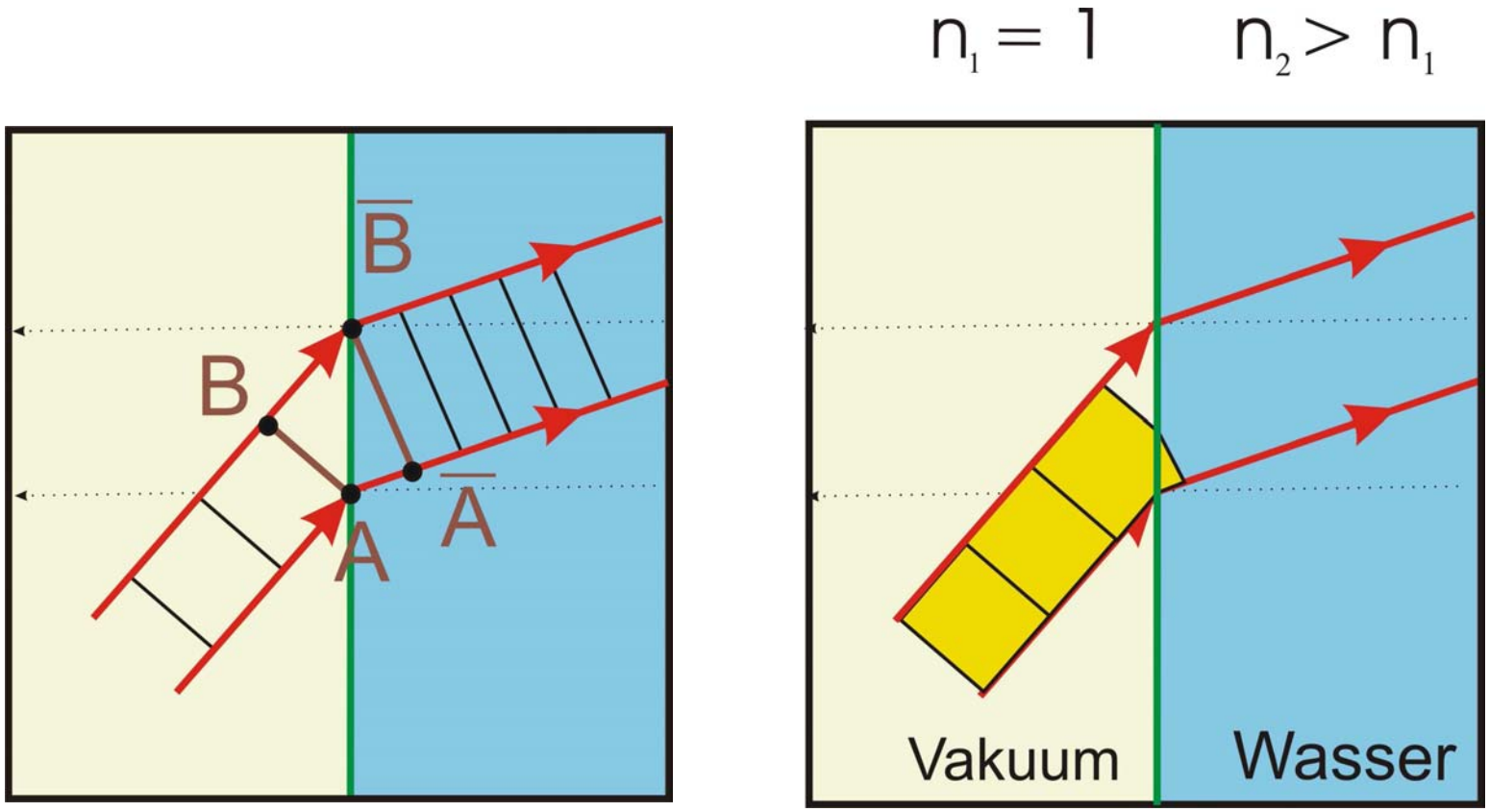
a) Welle in Medium mit positiven Brechungsindex



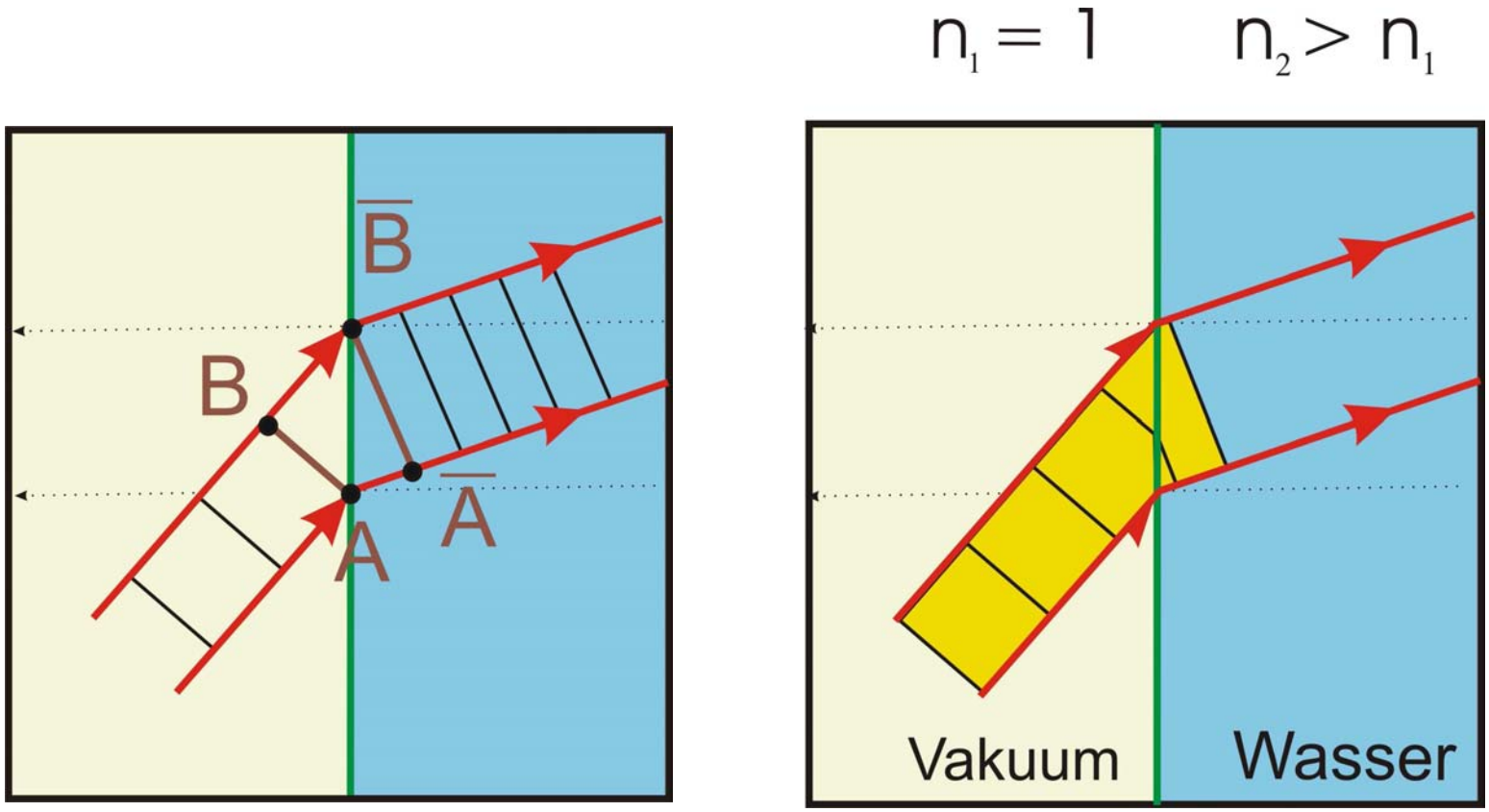
a) Welle in Medium mit positiven Brechungsindex



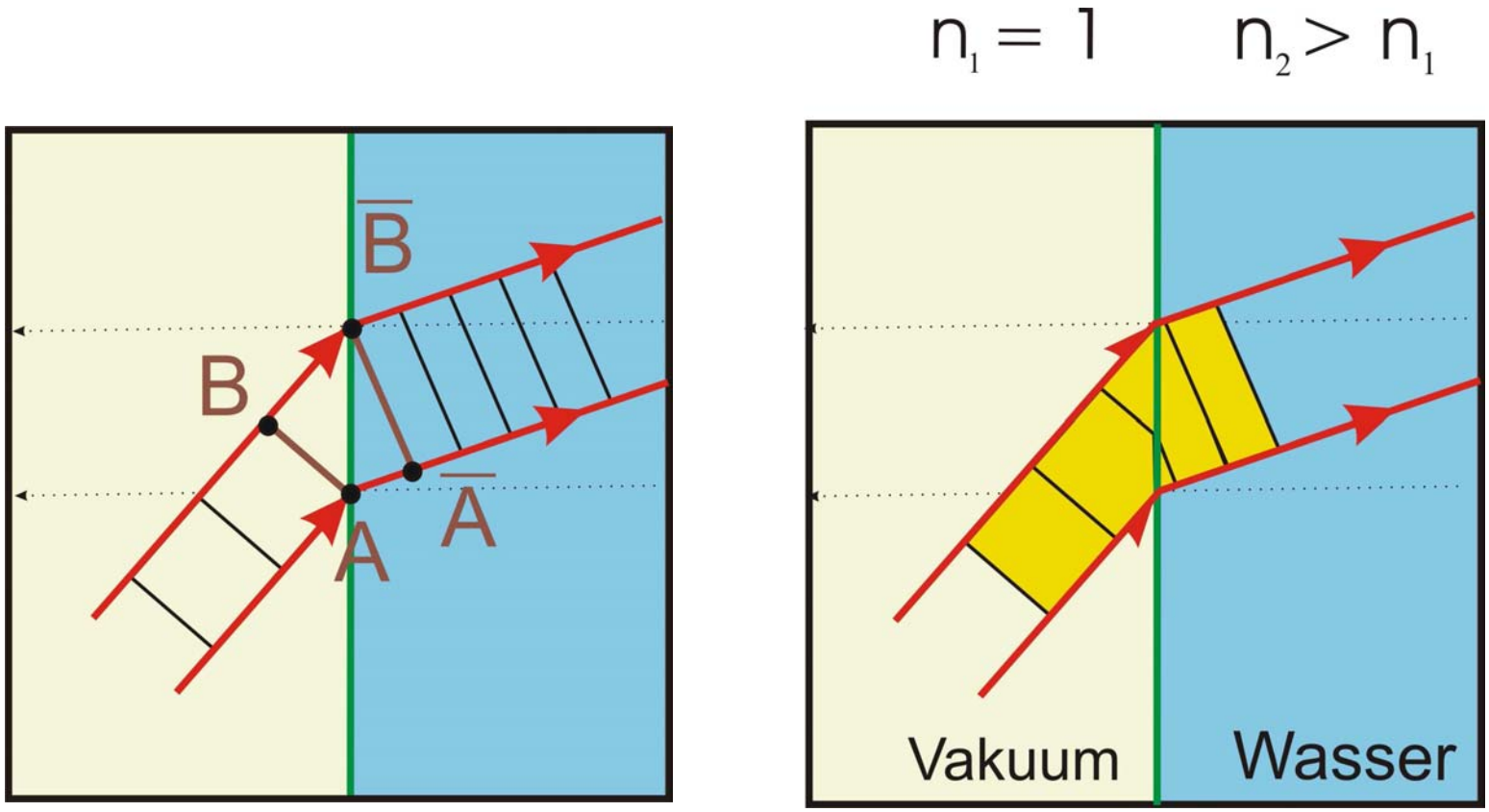
a) Welle in Medium mit positiven Brechungsindex



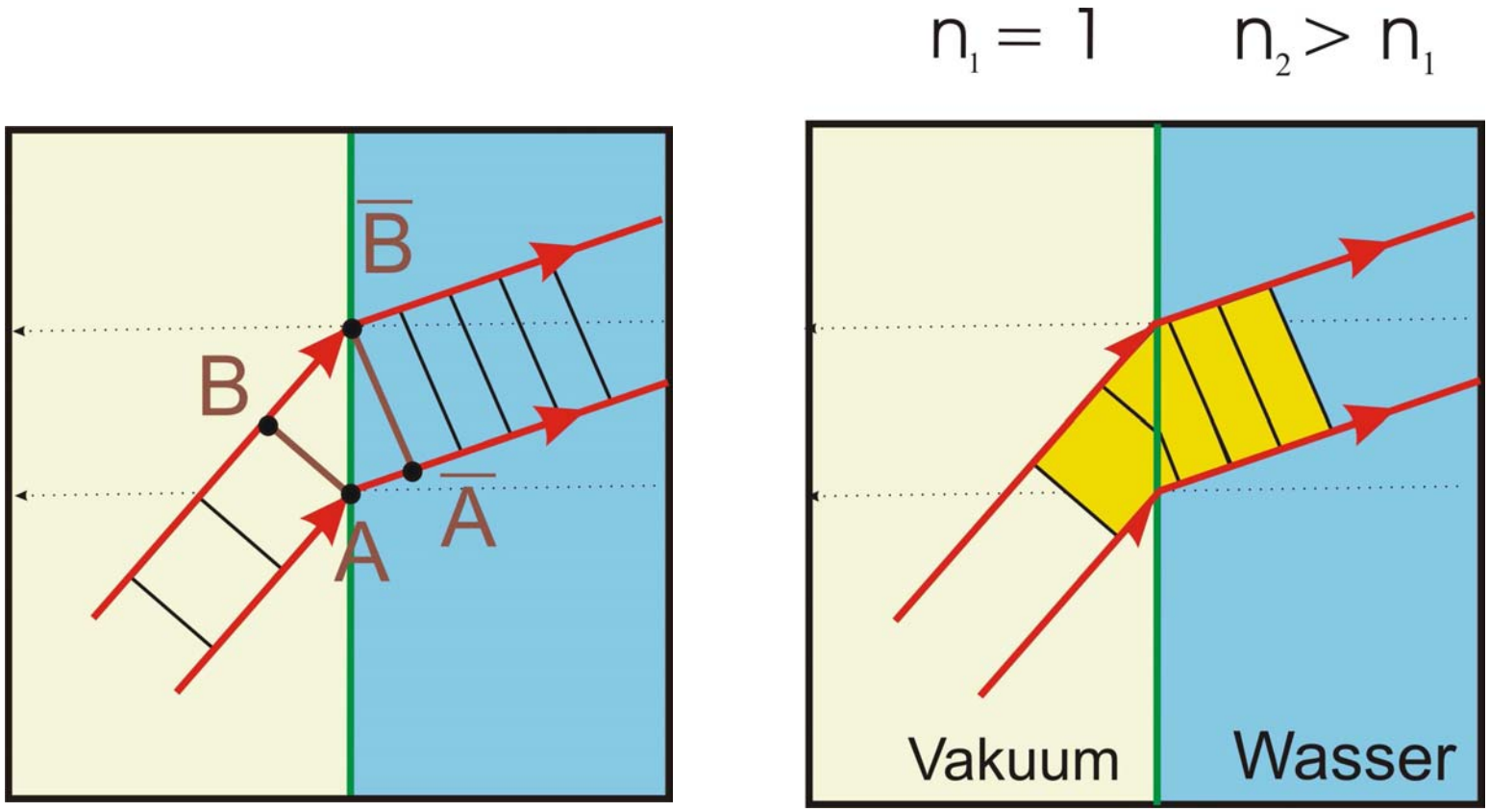
a) Welle in Medium mit positiven Brechungsindex



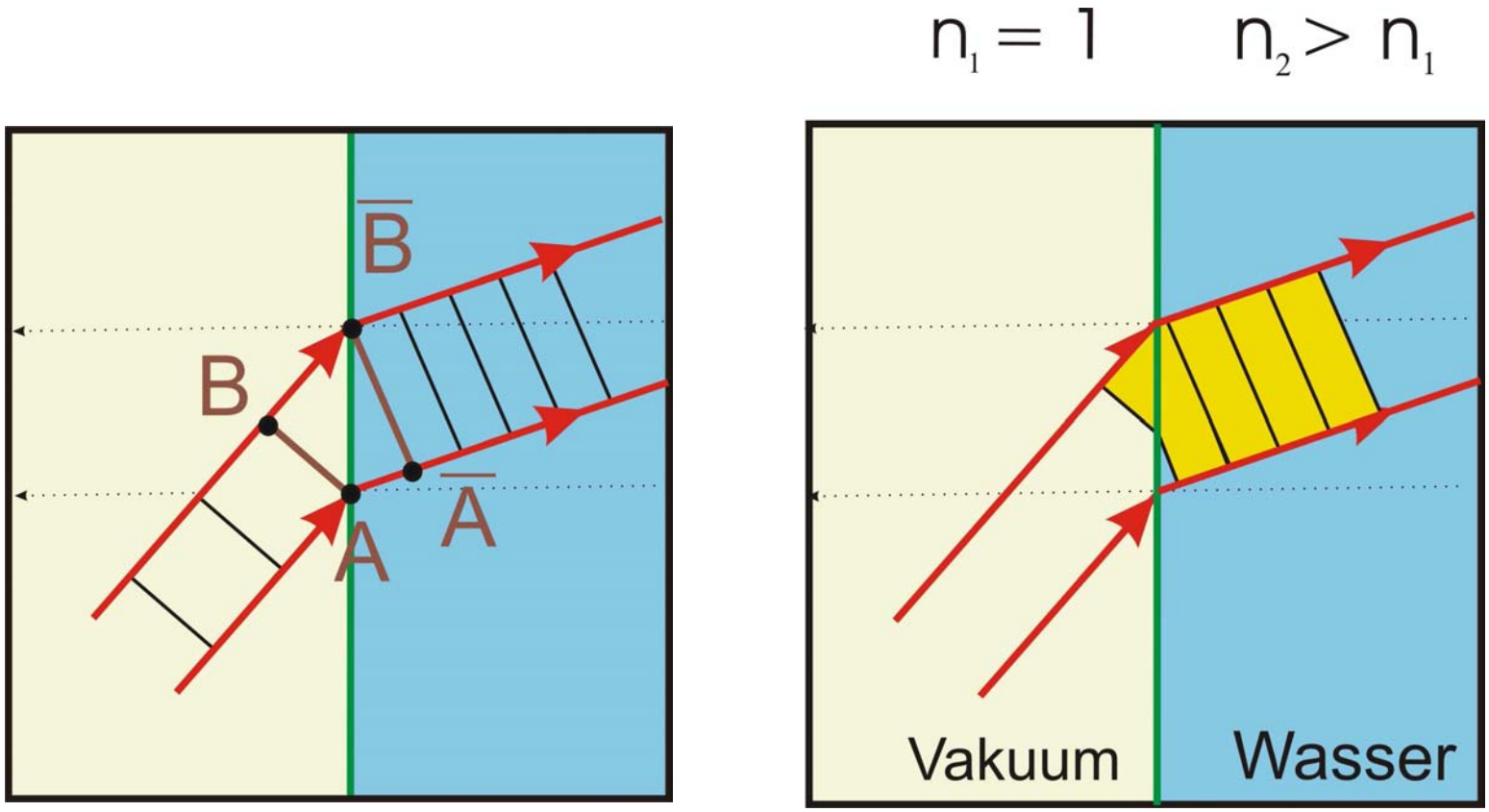
a) Welle in Medium mit positiven Brechungsindex



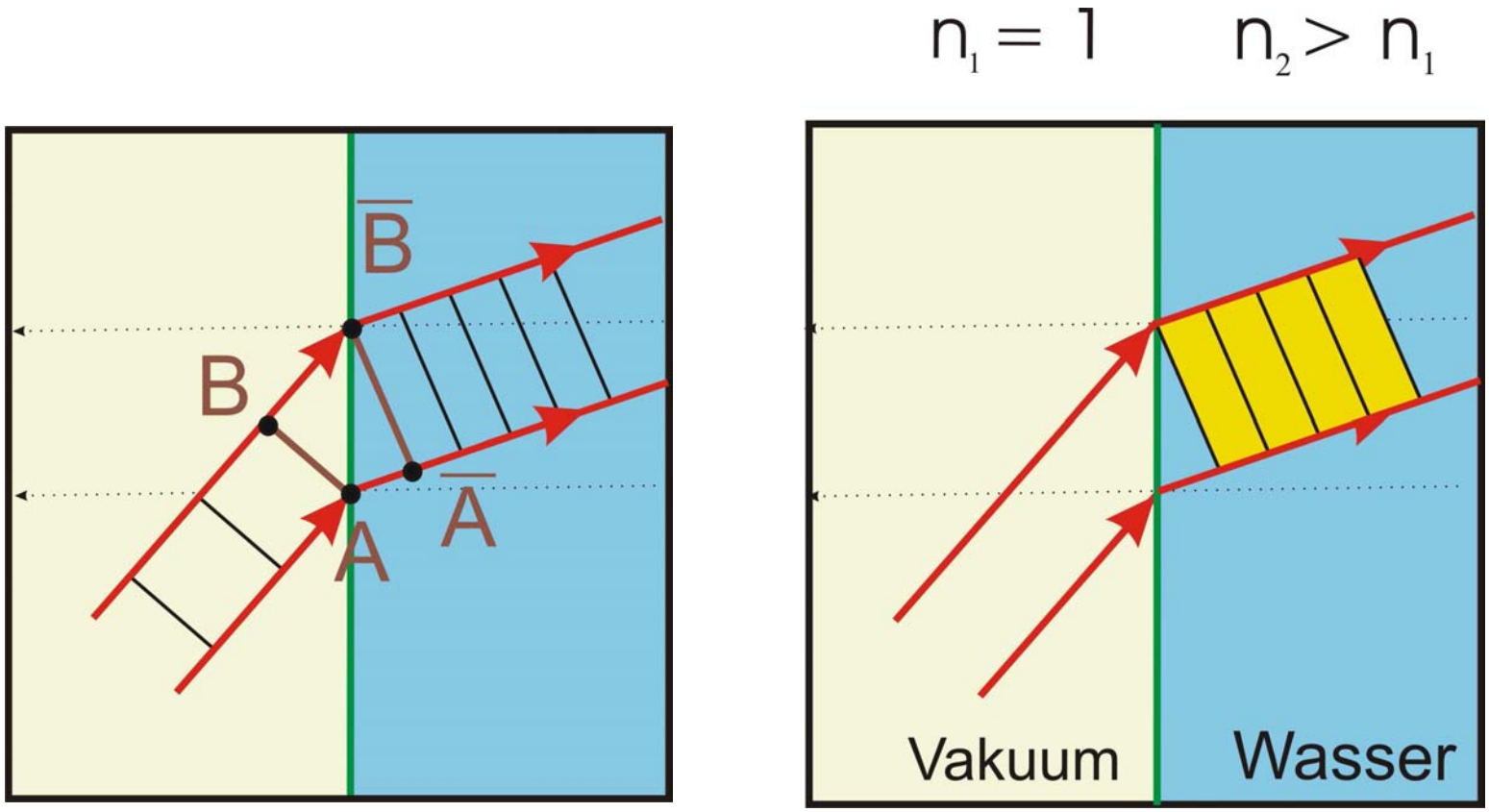
a) Welle in Medium mit positiven Brechungsindex



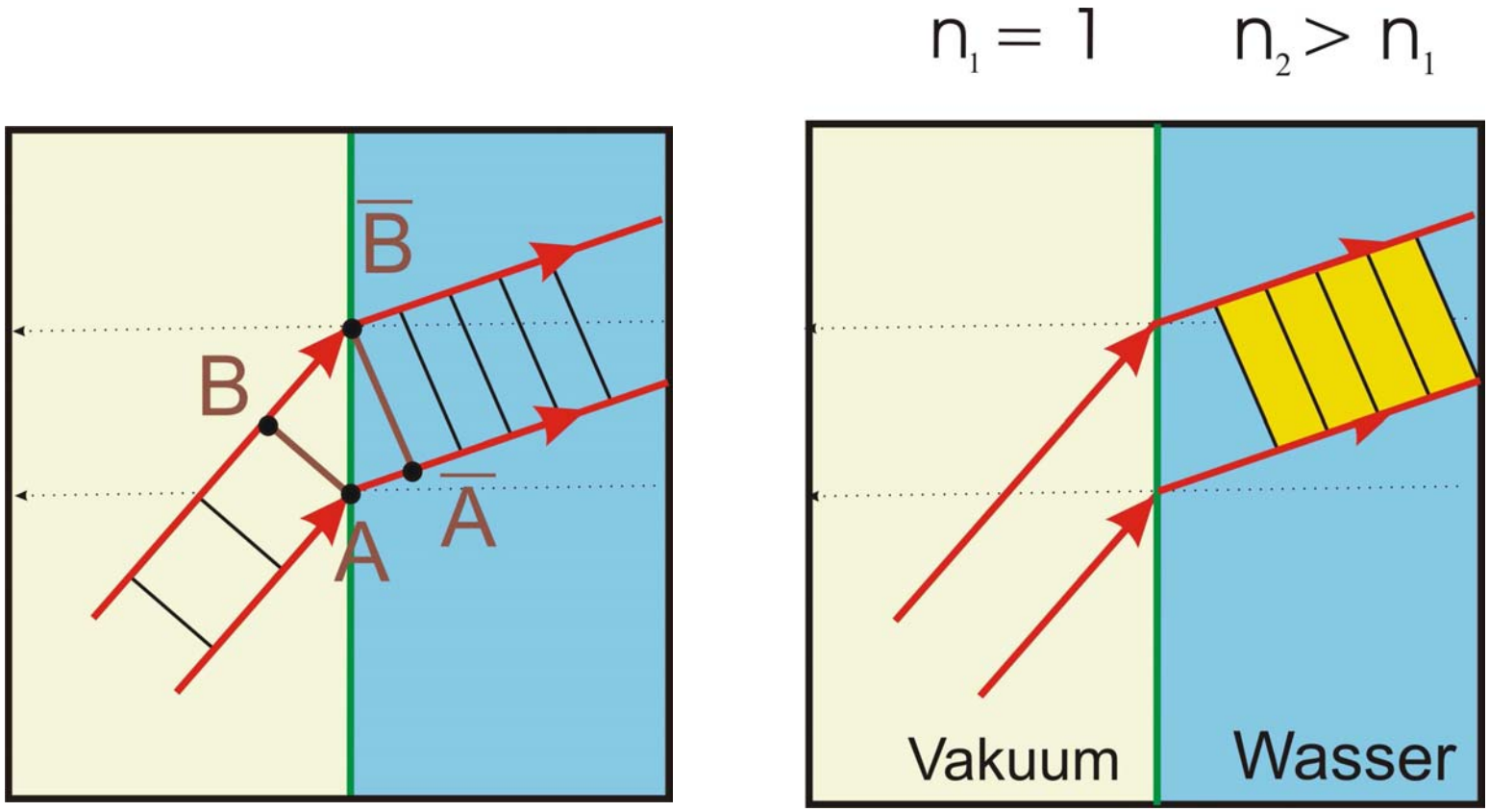
a) Welle in Medium mit positiven Brechungsindex



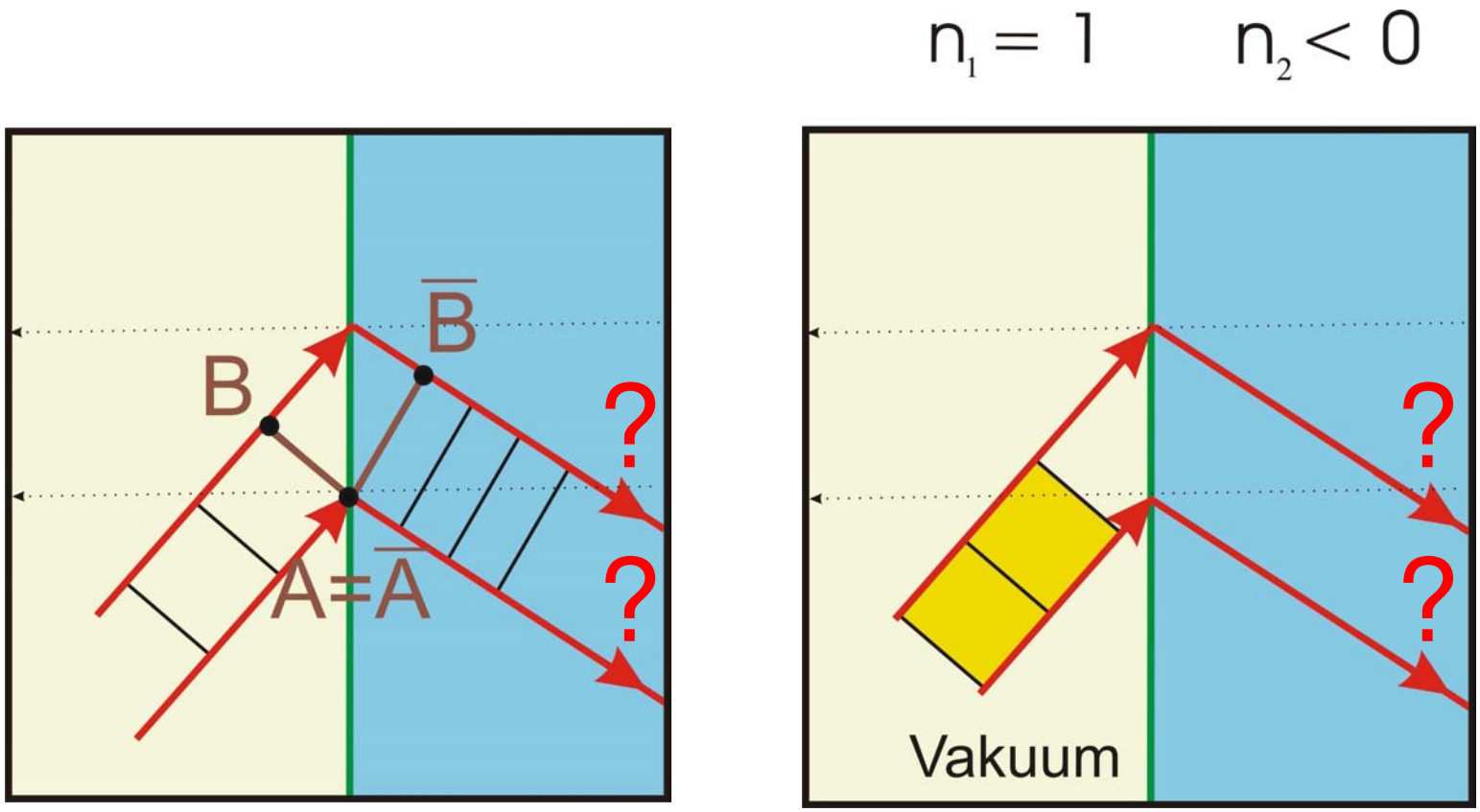
a) Welle in Medium mit positiven Brechungsindex



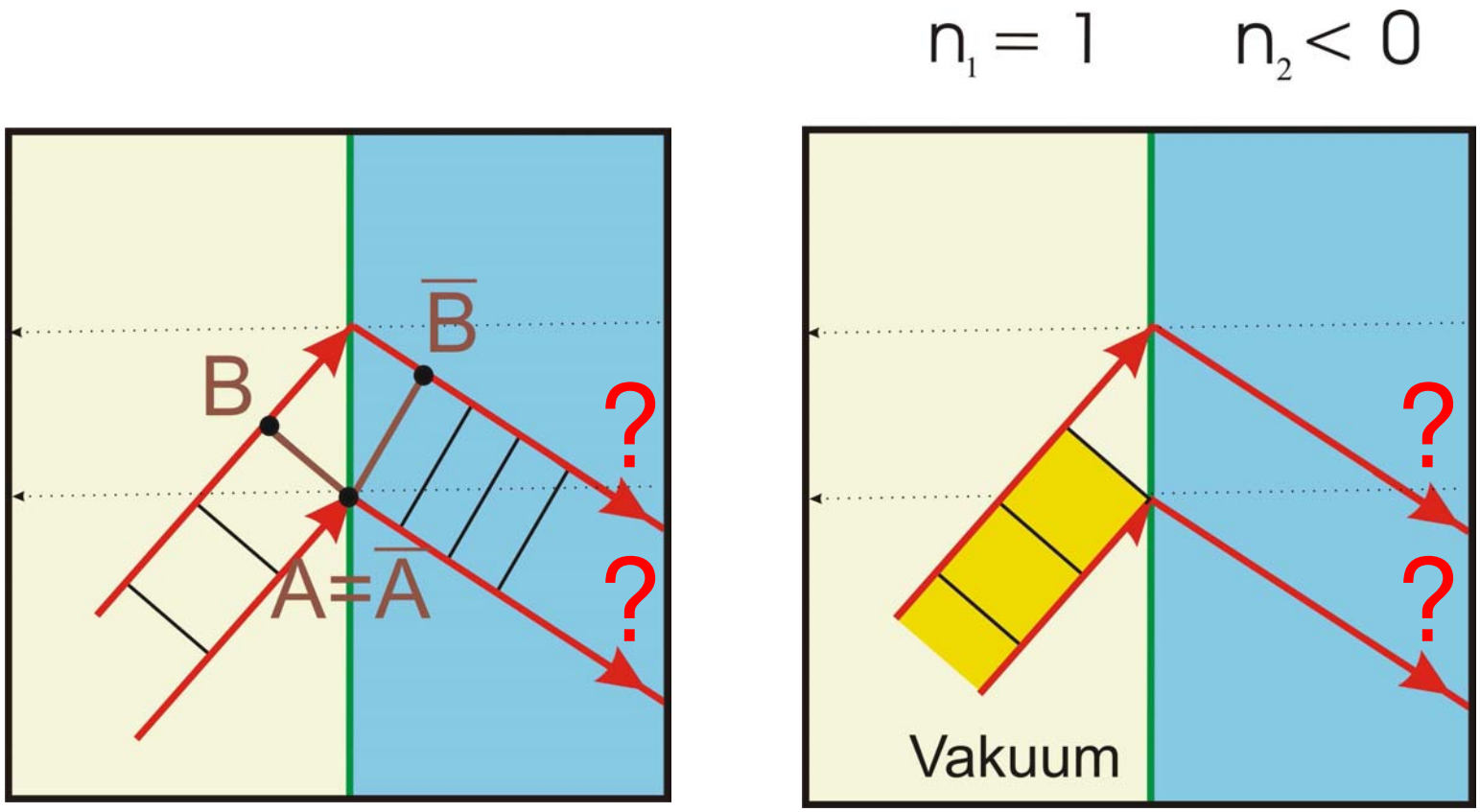
a) Welle in Medium mit positiven Brechungsindex



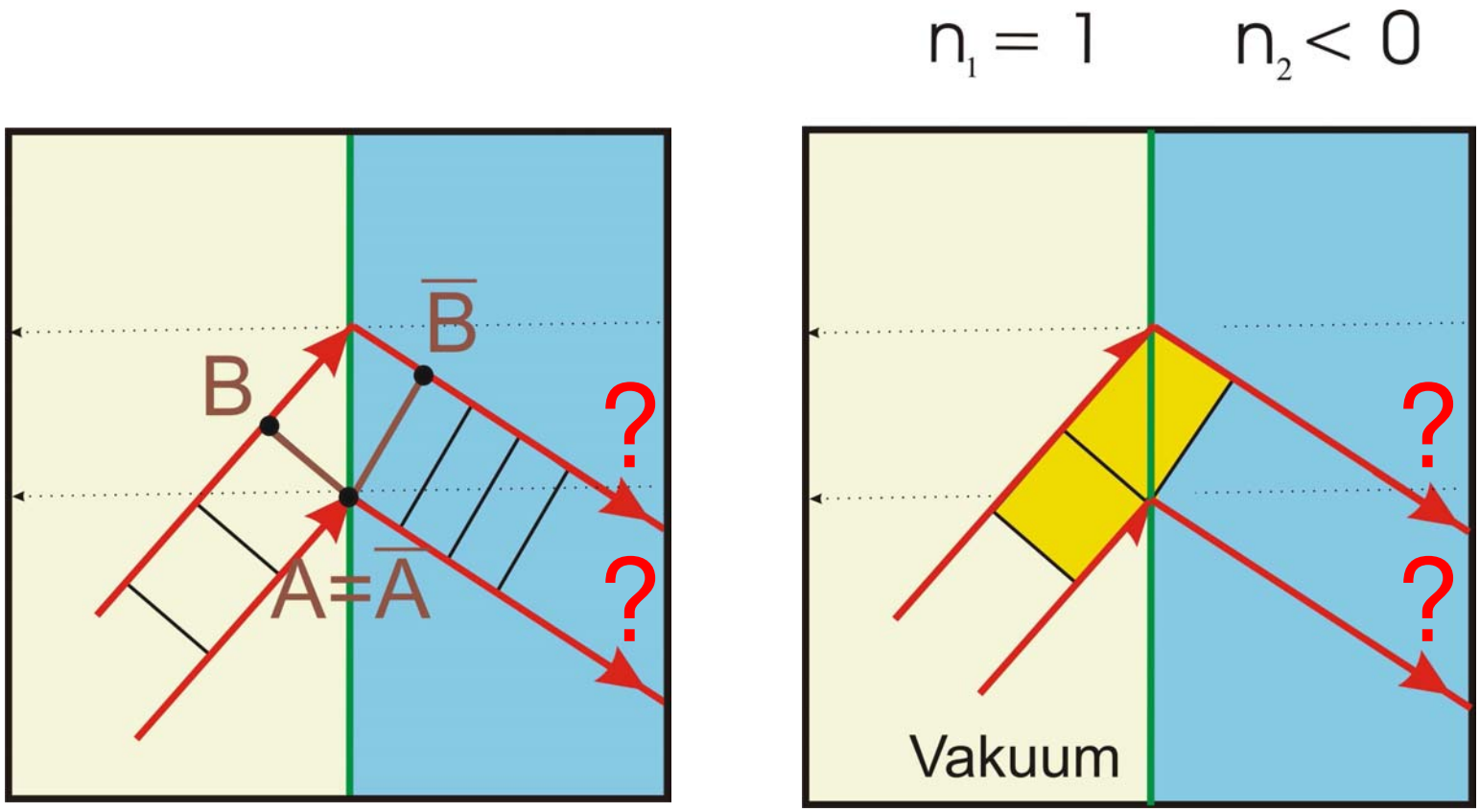
b) Welle in Medium mit negativen Brechungsindex



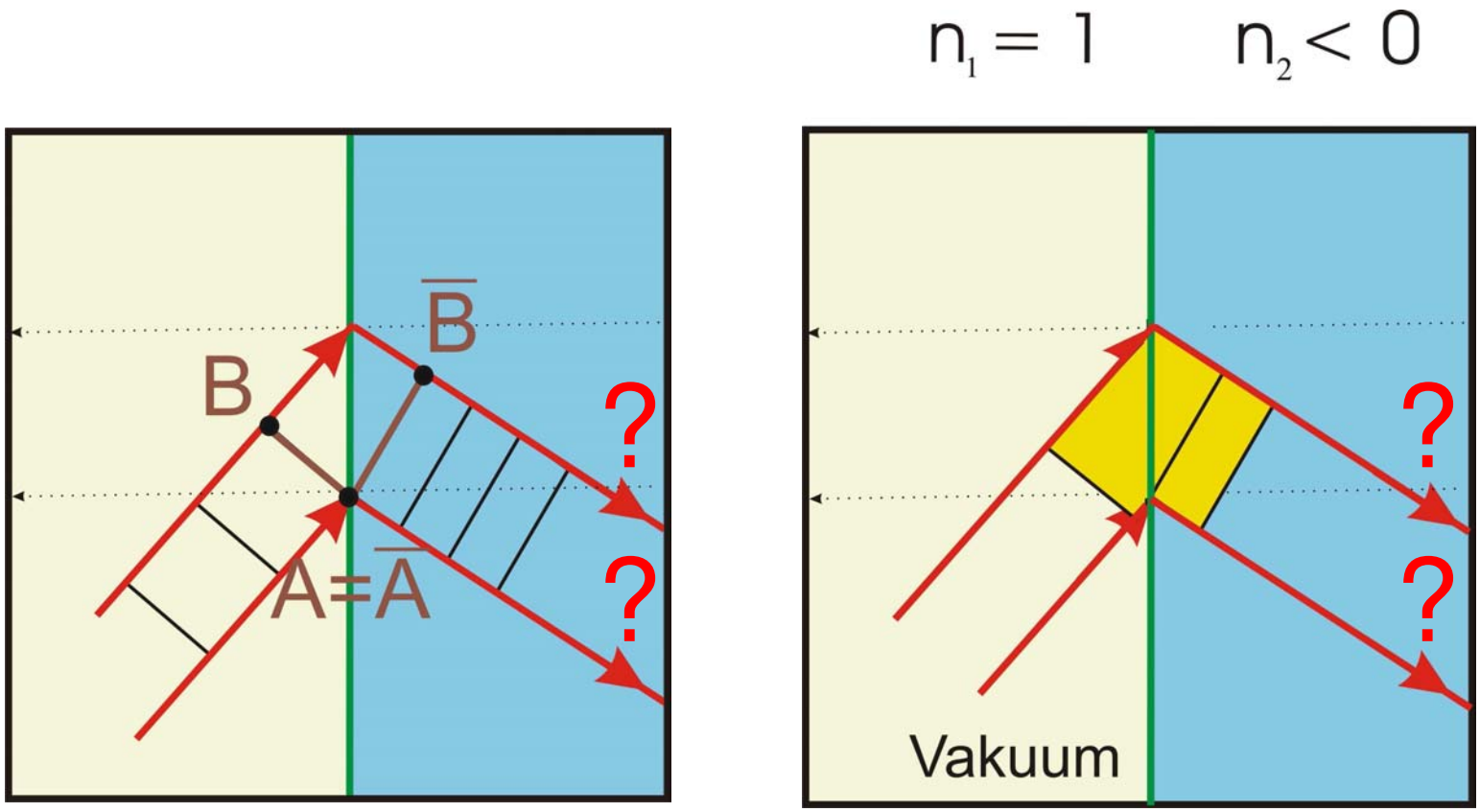
b) Welle in Medium mit negativen Brechungsindex



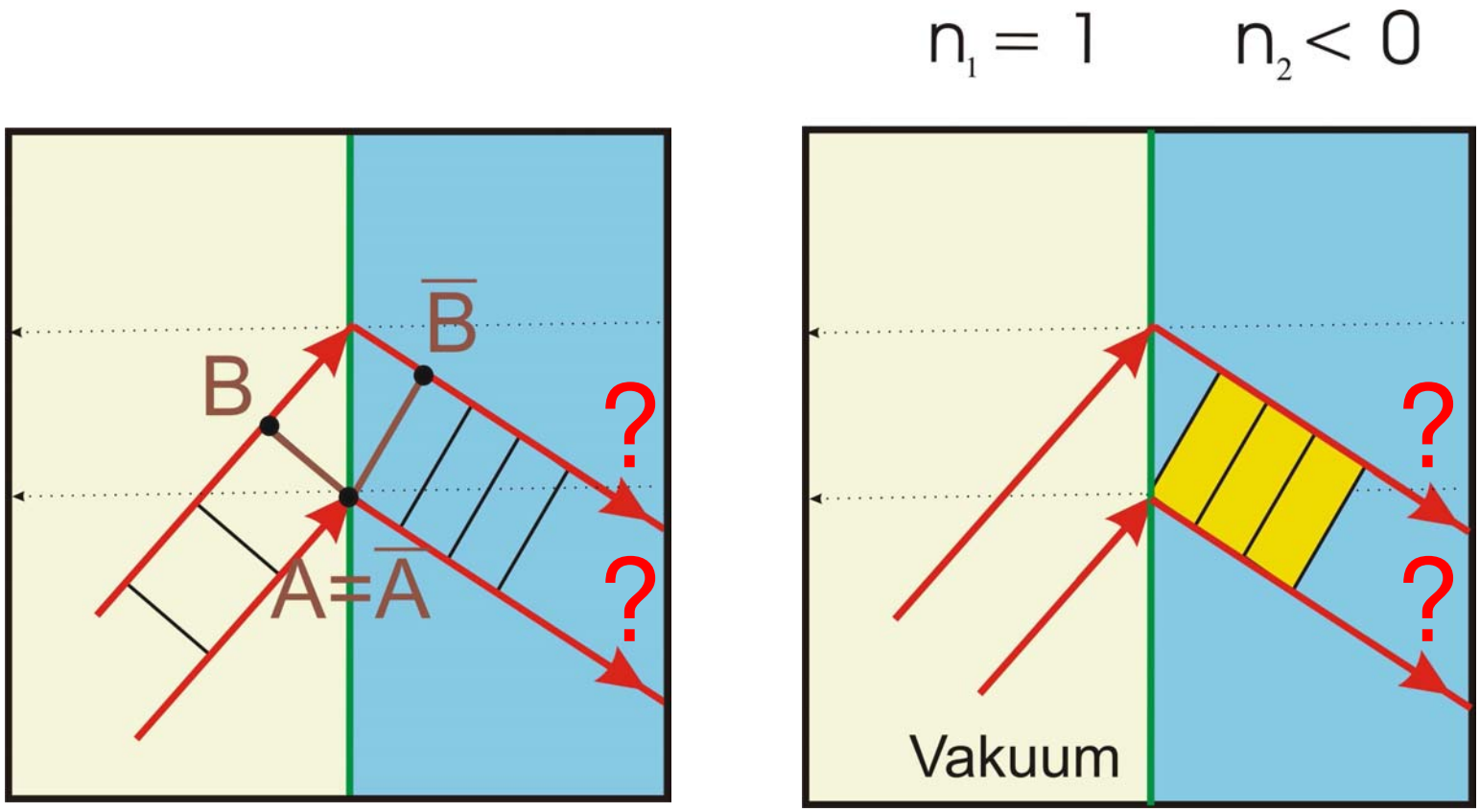
b) Welle in Medium mit negativen Brechungsindex



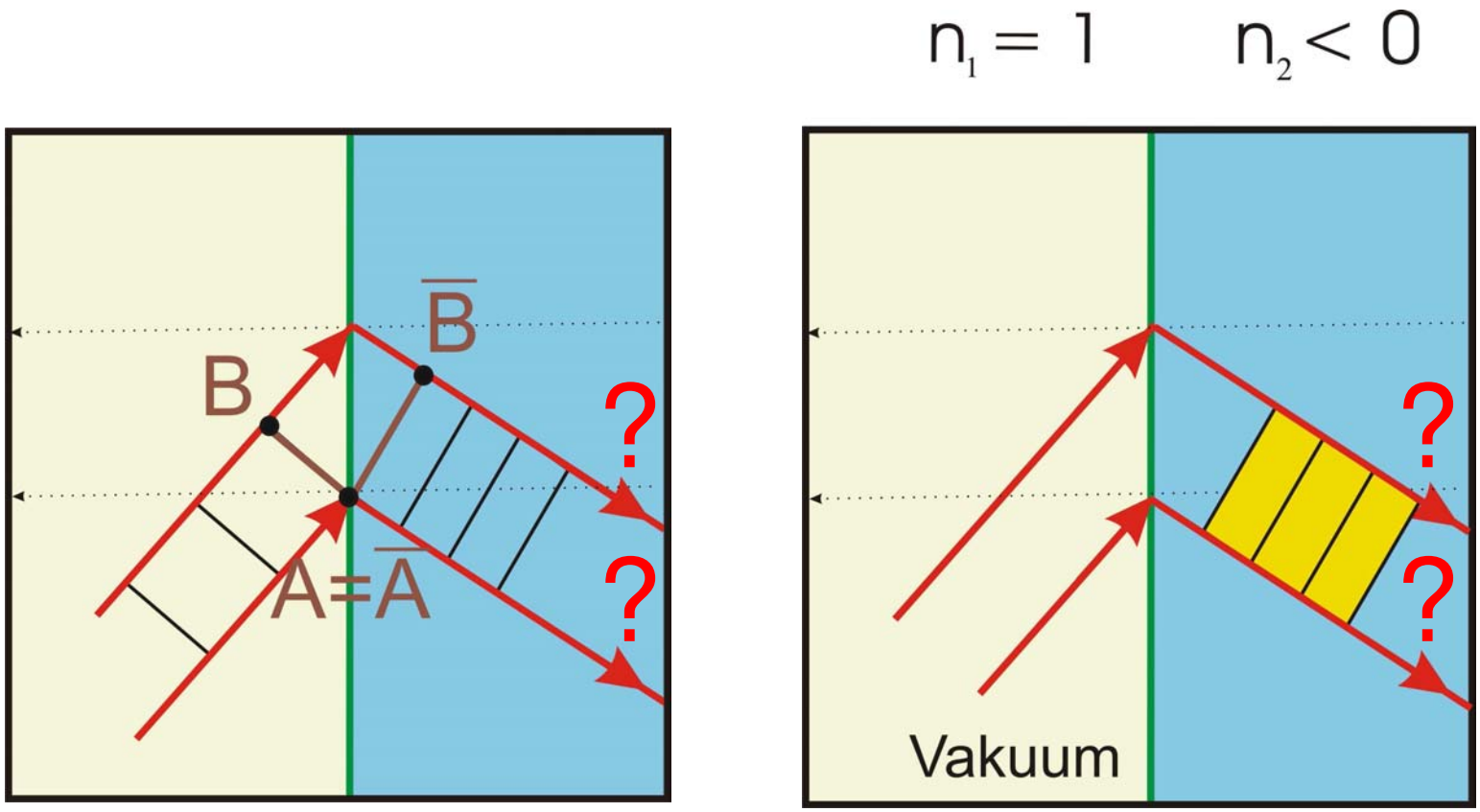
b) Welle in Medium mit negativen Brechungsindex



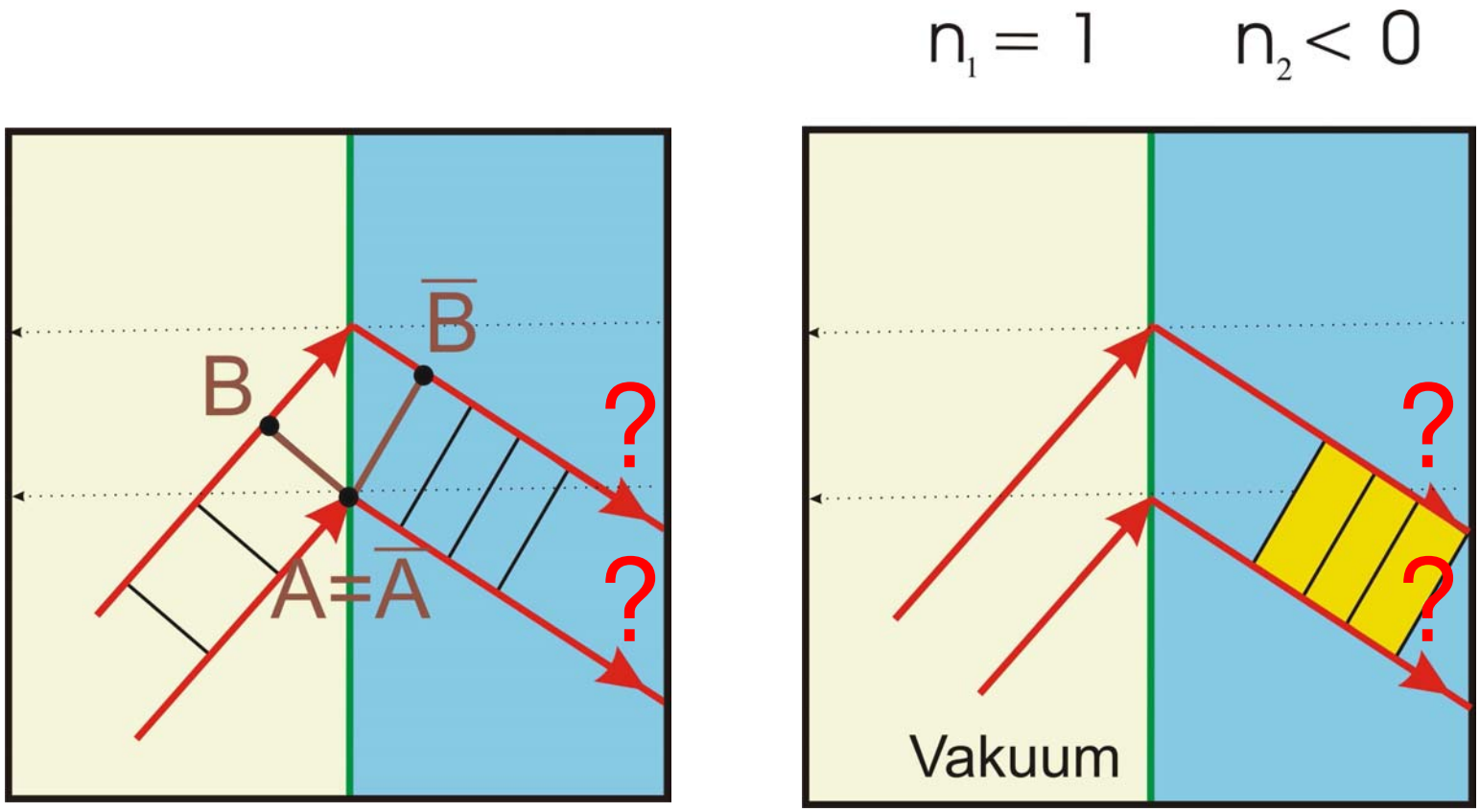
b) Welle in Medium mit negativen Brechungsindex



b) Welle in Medium mit negativen Brechungsindex



b) Welle in Medium mit negativen Brechungsindex



Maxwellgleichungen für elektromagnetische Wellen in Materie

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\vec{D}(\vec{r},t) &= 0 && mit \quad \vec{D} = \epsilon\vec{E} \\
\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) &= -\frac{1}{c_0}\partial_t\vec{B}(\vec{r},t) && \\
\vec{\nabla}\vec{B}(\vec{r},t) &= 0 && mit \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \\
\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{r},t) &= \frac{4\pi}{c_0}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{1}{c_0}\partial_t\vec{D}(\vec{r},t) && mit \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}
\end{aligned}
$$

Wellengleichung: $\triangle \vec{E} \;=\; (\mu \frac{4\pi}{c_0^2}\sigma\partial_t + \epsilon\mu\frac{1}{c_0^2}\partial_{t^2}^2)\vec{E}$

Ansatz: $\vec{E} \propto e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$

$$\Rightarrow \vec{k}^2 = \tfrac{\epsilon\mu}{c_0^2}\omega^2(1 + i\tfrac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon})$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{k^2 c_0^2}{\omega^2} := \hat{n}(\omega)^2 = \Big(n(\omega) + i\kappa\Big)^2 = \epsilon\mu + i\,\epsilon\mu\tfrac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega}$$

$$\Big(\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}(\omega)\;;\; \hat{\mu} = \hat{\mu}(\omega)\Big) \in \mathbb{C} \qquad \Rightarrow \hat{n} = \hat{n}(\omega) \in \mathbb{C}$$

Definition Brechungsindex:

$$\boxed{\hat{n}^2 = \hat{\epsilon}\,\hat{\mu}}$$

Übersicht

1. Einführung: Brechungsindex

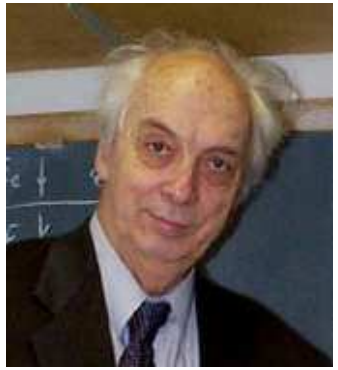
2. Theoretische Überlegungen V. Veselago

3. Herstellung von Linkshändigem Material :

- Realisierung eines Material mit negativem ε
- Realisierung eines Material mit negativem μ
- Herstellung eines „Metamaterial“

4. Anwendungen

5. Zusammenfassung



SOVIET PHYSICS USPEKHI VOLUME 10, NUMBER 4 JANUARY-FEBRUARY 1968

538.30

THE ELECTRODYNAMICS OF SUBSTANCES WITH SIMULTANEOUSLY NEGATIVE VALUES OF ϵ AND μ

V. G. VESELAGO

P. N. Lebedev Physics Institute, Academy of Sciences, U.S.S.R.

Usp. Fiz. Nauk 92, 517–526 (July, 1964)

Veselagos Überlegung: Was hat ein Medium mit negativem ε und negativem μ für Konsequenzen in Bezug auf e.m. Wellen?

Gedankengang:

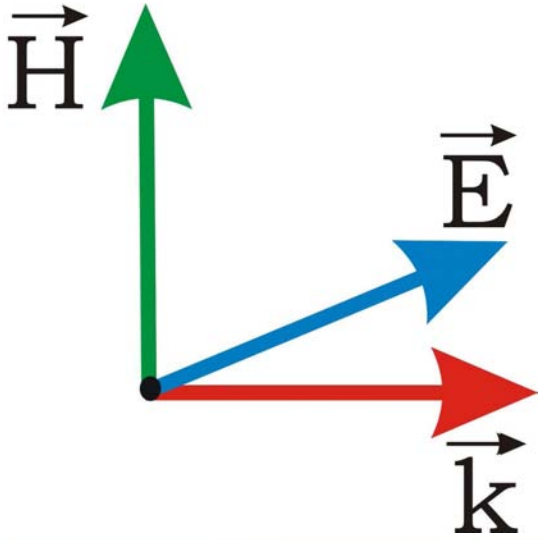
- Maxwellgl. für e.m. Wellen in Materie
- Ansatz: $\vec{E} \propto e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$

führt auf:

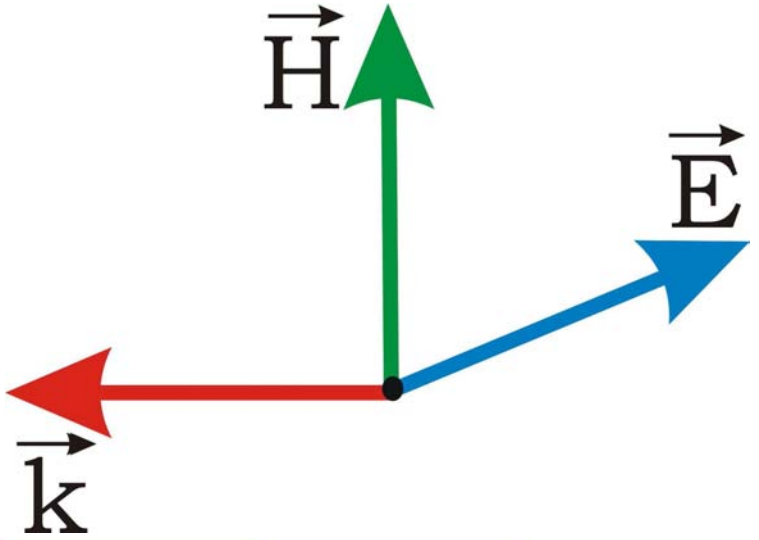
$$\vec{k} \times \vec{E} = (\pm\mu)\,\frac{1}{c}\,\omega\,\vec{H}$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -(\pm\varepsilon)\,\frac{1}{c}\,\omega\,\vec{E}$$

a) **ε, μ > 0**
⇨ **„Rechtshändiges Material (RHM)“**



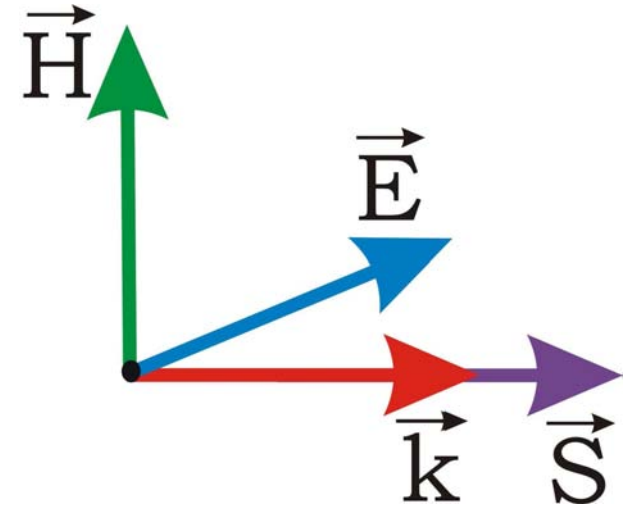
b) **ε, μ < 0**
⇨ **„Linkshändiges Material“ (LHM)**



Energiefluss: $\vec{S} := \frac{c_0}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{H})$ $\vec{S}$: Poynting Vektor

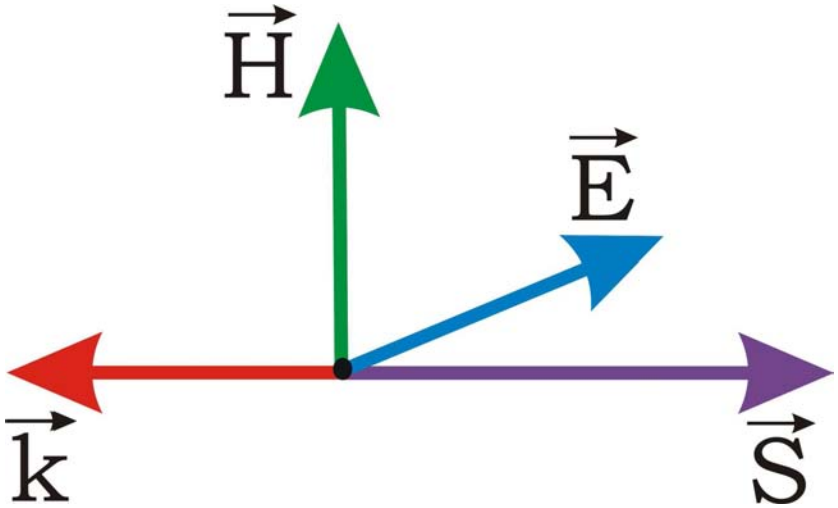
$\Rightarrow \vec{S}, \vec{E}, \vec{H}$ bilden grundsätzlich ein "Rechtshändiges System"

a) **Rechtshändiges Material**



$\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{S}$

b) **Linkshändiges Material**



$\vec{k} \uparrow\downarrow \vec{S}$

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

a) Phasengeschwindigkeit:

- Wellengeschwindigkeit -

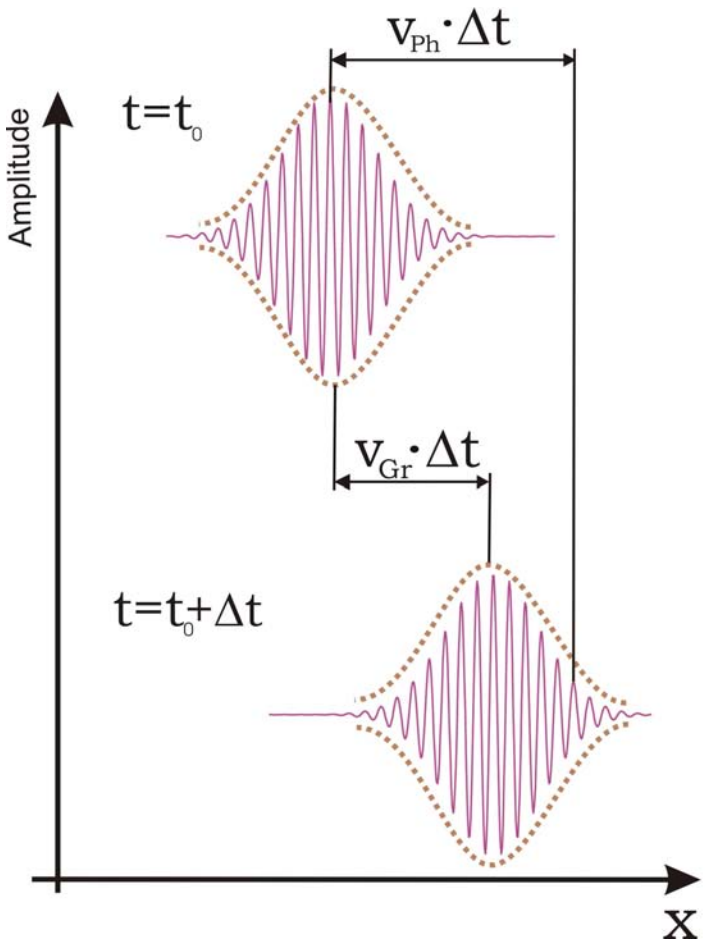
Phase der Welle: $\Phi := \vec{k}\,\vec{r} - \omega(\vec{k})\,t$

$$\Rightarrow \vec{v}_{Ph} := \dot{\vec{r}} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}\vec{e}_k \qquad \boxed{\vec{v}_{Ph} \uparrow\uparrow \vec{k}}$$

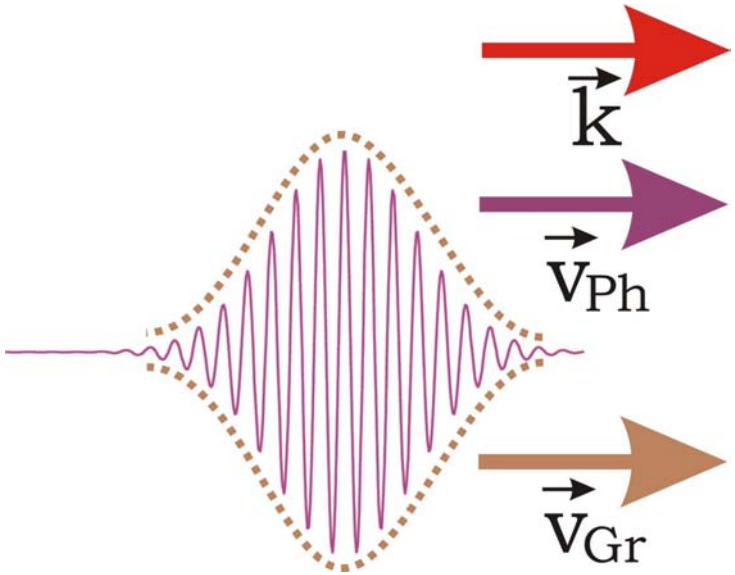
b) **Gruppengeschwindigkeit:**

- Geschwindigkeit der Einhüllenden -

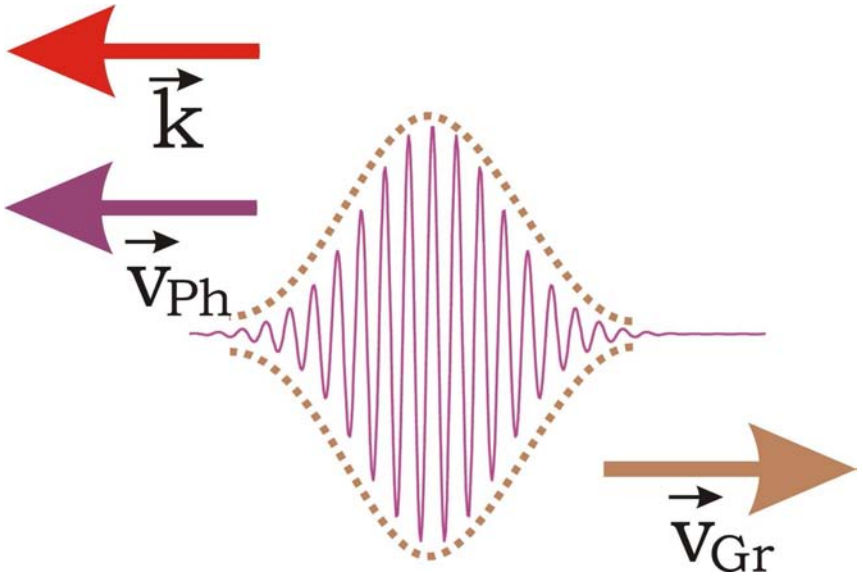
$$\vec{v}_{Gr} := \nabla_{\vec{k}}\,\omega(\vec{k}) \qquad \boxed{\vec{v}_{Gr} \uparrow\uparrow \vec{S}}$$



a) **Rechtshändiges Material**



b) **Linkshändiges Material**



Behauptung: Voraussetzung für n < 0: ε und μ negativ

Bsp. μ = - 1; ε = - 1

mathematische Betrachtung:

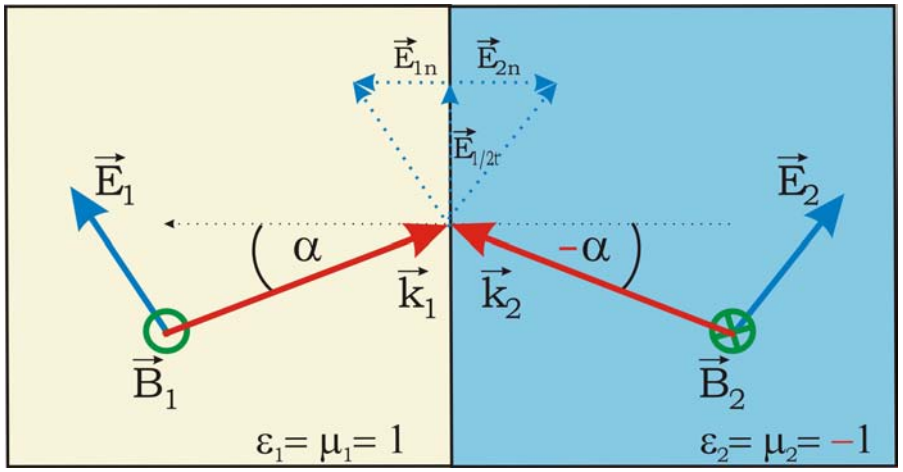
$$\text{mit:} \quad n^2 = \epsilon\mu \Rightarrow n = \pm 1$$

Negativer Brechungsindex ?

physikalische Betrachtung:

Stetigkeitsbedingungen für e.m. Wellen beim Grenzübergang

$$E_{t1} = E_{t2} \qquad \mu_1 B_{t1} = \mu_2 B_{t2}$$
$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2} \qquad B_{n1} = B_{n2}$$

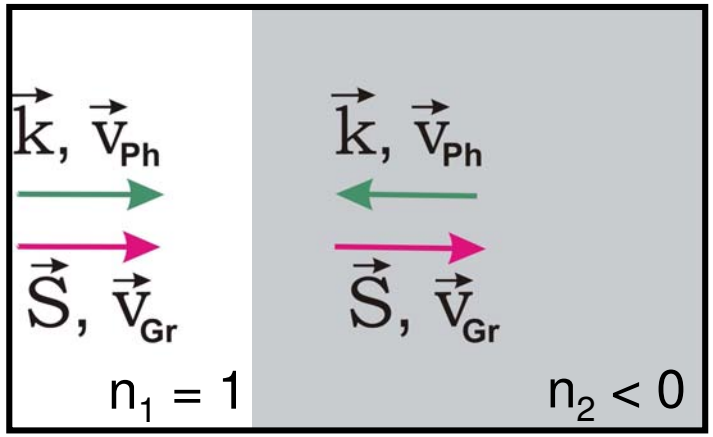


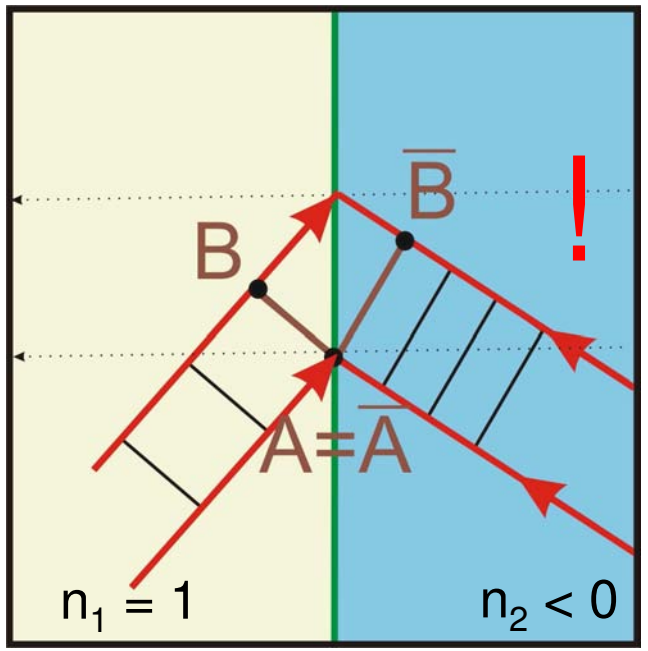
$$\frac{sin(\alpha)}{sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1} \text{ mit } \beta = -\alpha \Rightarrow sin(\beta) = sin(-\alpha) = -sin(\alpha)$$
$$\Rightarrow n_2 = n_1 \frac{sin(\alpha)}{-sin(\alpha)} = -n_1 = -1$$

Negativer Brechungsindex !

Veselagos Theorie für ein Material mit $\varepsilon < 0$ und $\mu < 0$:

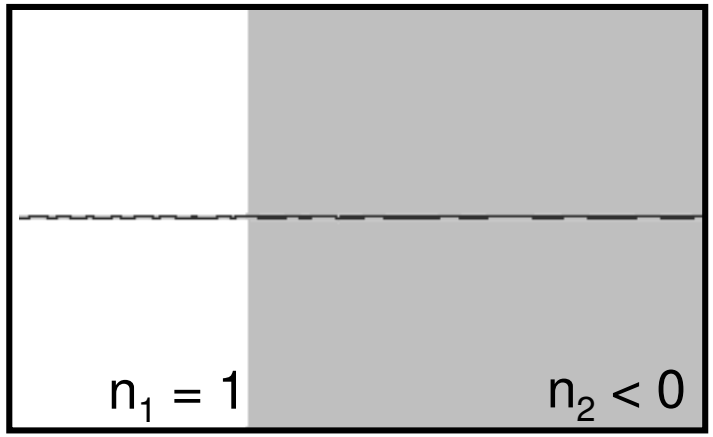
- Vektoren $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$ bilden ein Linkshändiges System
- Poynting-Vektor $\vec{S}$ zeigt antiparallel zum Wellenvektor $\vec{k}$
- Gruppen- und Phasengeschwindigkeit laufen antiparallel
- Brechungsindex n negativ

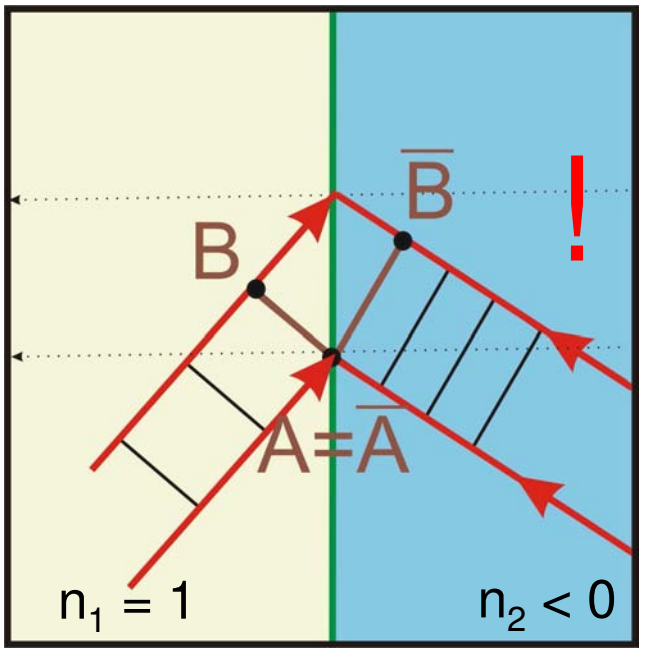




Veselagos Theorie für ein Material mit $\varepsilon < 0$ und $\mu < 0$:

- Vektoren $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$ bilden ein Linkshändiges System
- Poynting-Vektor $\vec{S}$ zeigt antiparallel zum Wellenvektor $\vec{k}$
- Gruppen- und Phasengeschwindigkeit laufen antiparallel
- Brechungsindex n negativ





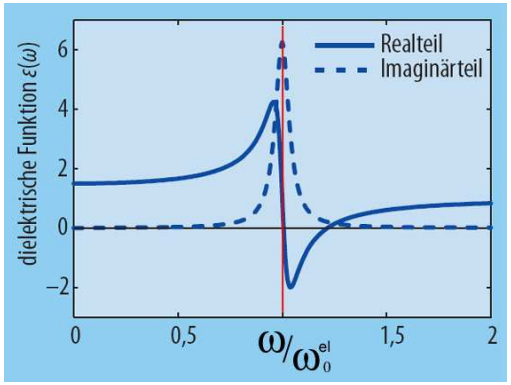
⇨ Für $n < 0$ benötigen wir ein Material mit $(\varepsilon, \mu) < 0$

Ist solch ein Material überhaupt realisierbar?

Was hat ein Material mit $\varepsilon < 0$ bzw. $\mu < 0$ für Eigenschaften?

Wo findet man solche Materialen?

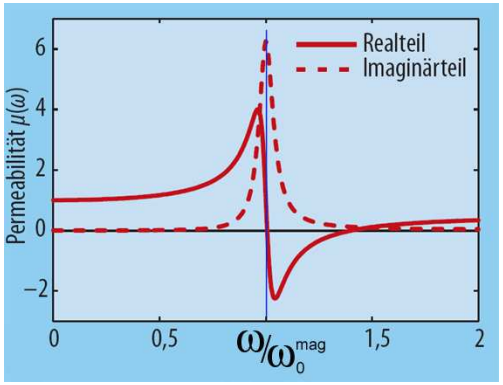
Dielektrische Funktion ε(ω): **„Drude-Lorentz Modell“**



$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^{el})^2 - \omega^2 - i\gamma_e\omega}$$

m:		Masse Elektron
ω_0^{el}:		Resonanzfrequenz
$\omega_p^2 := \frac{4\pi N e^2}{m_e}$	:	Plasmafrequenz
γ_e:		Dämpfungskoeffizient

Analoge Überlegungen auch für μ(ω):



Probleme:
- $\omega_0^{el} \gg \omega_0^{mag}$
- Bereiche negativer Funktion sehr schmal

Übersicht

1. Einführung: Brechungsindex

2. Theoretische Überlegungen V. Veselago

3. Herstellung von Linkshändigem Material :

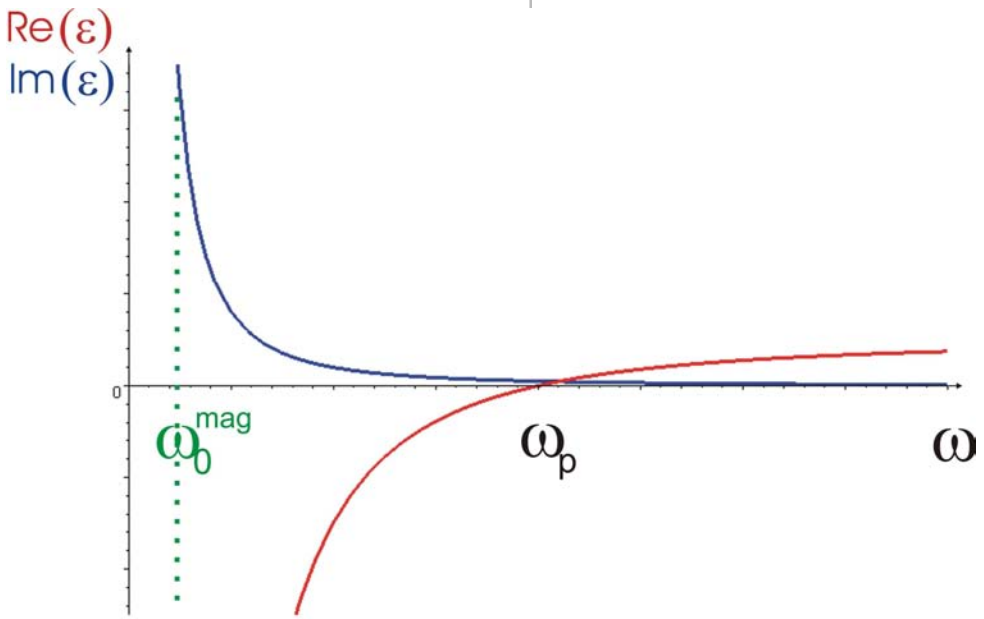
- **Realisierung eines Material mit negativem ε**
- Realisierung eines Material mit negativem μ
- Herstellung eines „Metamaterial“

4. Anwendungen

5. Zusammenfassung

Metall

- nahezu freie Elektronen $\Rightarrow \omega_0^{el} = 0$ „Drude Peak“
- $\epsilon(\omega)$ vereinfacht sich zu: $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}$ mit $\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m_e}$
- negativer Bereich groß
- $\gamma \propto \frac{1}{\sigma} \Rightarrow$ Verwendung: Al, Cu, Ag, Au

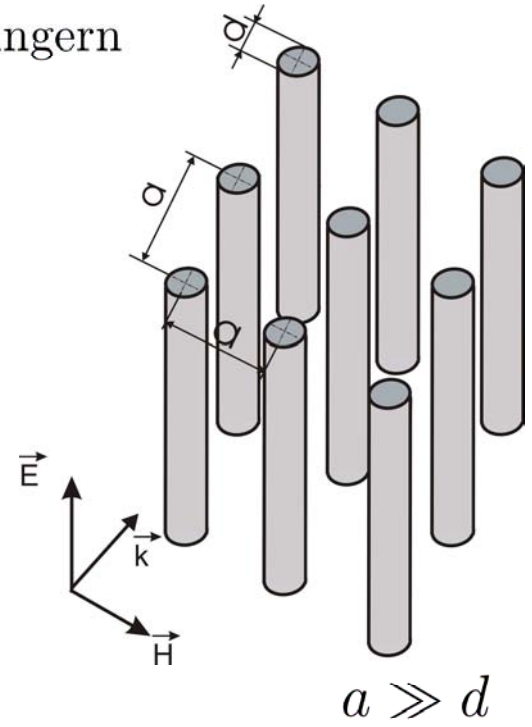


J. Pendry:
verringern der Elektronendichte N ⇨ ω_p stark reduzierbar

Drahtstrukturen (1dim)

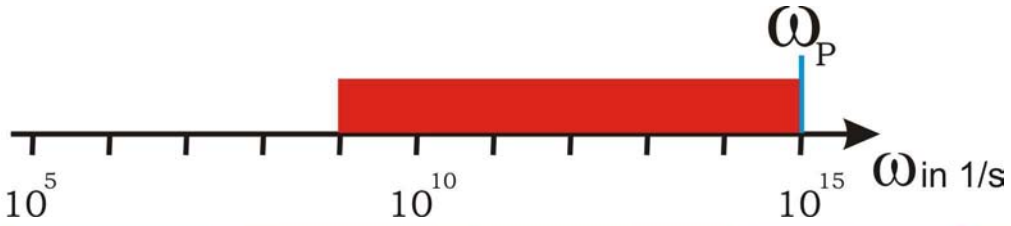
- dünne Metalldrähte in Luft
- $\lambda_{em} \gg a \Rightarrow$ homogenes Medium
- $\Rightarrow N_{eff} = N\frac{d^2\pi}{4a^2}$ $\quad \Rightarrow \omega_p^2 = \frac{4\pi N_{eff}\, e^2}{m_{eff}}$
- durch ändern der Drahtanordnung lässt sich N_{eff} variieren

$\Rightarrow \omega_P$ lässt sich um bis zu 6 Größenordnungen verringern



$a \gg d$

Bsp: Al



Übersicht

1. Einführung: Brechungsindex

2. Theoretische Überlegungen V. Veselago

3. Herstellung von Linkshändigem Material :

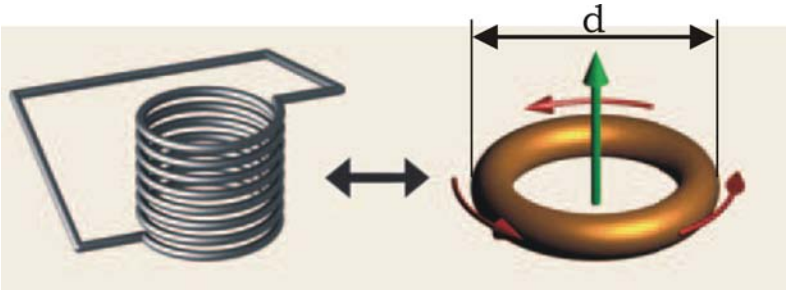
- Realisierung eines Material mit negativem ε
- **Realisierung eines Material mit negativem** μ
- Herstellung eines „Metamaterial“

4. Anwendungen

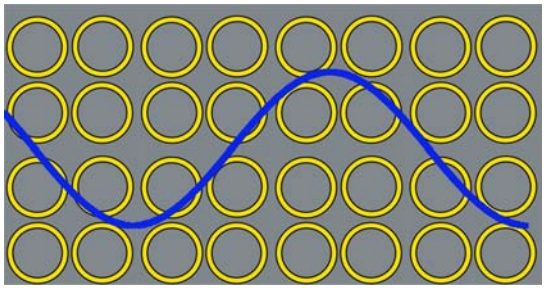
5. Zusammenfassung

Realisierung eines Material mit negativen μ

- magnetischer Dipol
- externes $\vec{B}$-Feld: $\vec{B} \Rightarrow \vec{\mu}_{mag}$

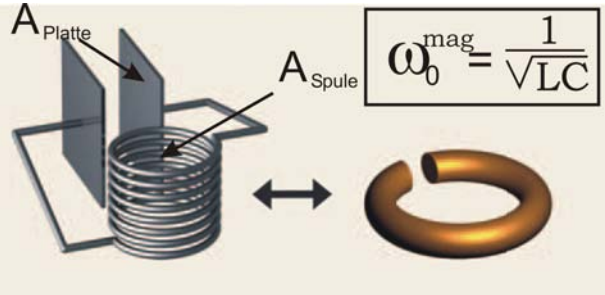


- $\lambda_{em} \gg d$
- räumliche Anordung
- Magnetisierung M : $M \propto \mu_{eff}$

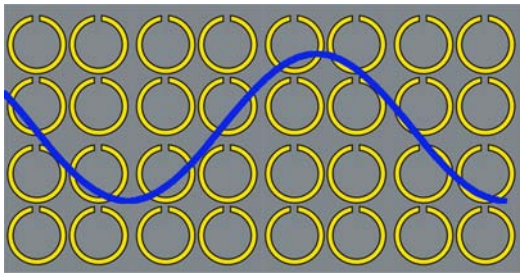


keine Resonanz ⇨ Schwingkreis

Magnetischer Resonator: „Split-Ring-Resonator“



Resonanz!



- Induktivität L: $L \propto A_{Spule}$
- Kapazität C: $C \propto A_{Platte}$

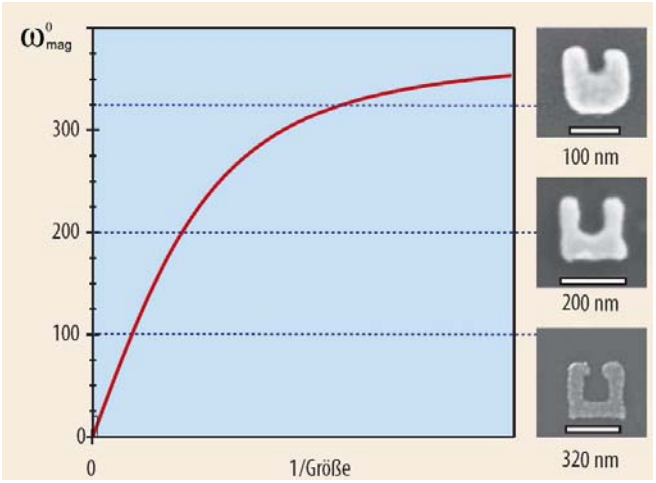
$\Rightarrow$ theoretisch für A klein $\Rightarrow$ ω_0^{mag} beliebig vergrößerbar

Problem:

Leitungselektronen besitzen E_{kin}: $E_{kin} \propto \frac{1}{A_{Spule}}$

$\Rightarrow$ ω_0^{mag} ist begrenzt!

Es gilt: $\omega_0^{mag} \propto \omega_P$



Übersicht

1. Einführung: Brechungsindex

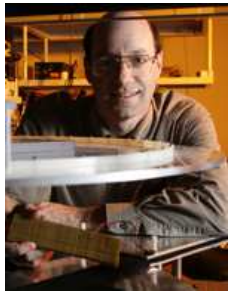
2. Theoretische Überlegungen V. Veselago

3. Herstellung von Linkshändigem Material :

- Realisierung eines Material mit negativem ε
- Realisierung eines Material mit negativem μ
- **Herstellung eines „Metamaterial“**

4. Anwendungen

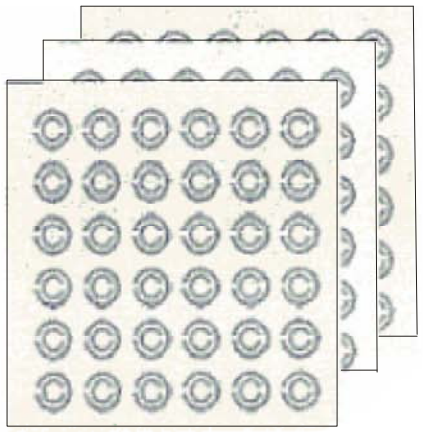
5. Zusammenfassung



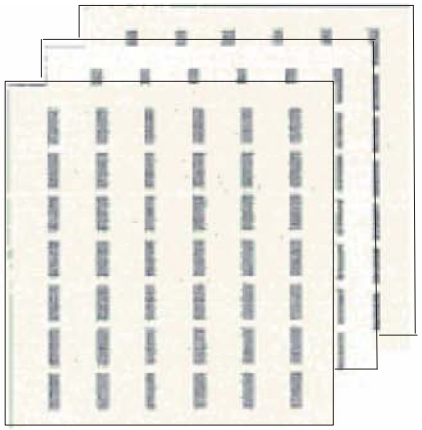
Wie muss Material aussehen, damit nun ε und μ negativ?

1999: J. Pendry: Kombination von Split-Ring-Resonator und Drahtstrukur

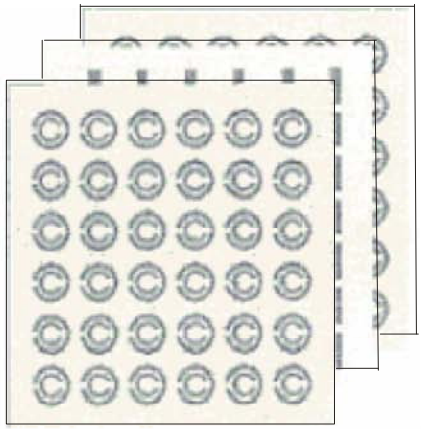
2001: D. Smith und Mitarbeiter bauen solch ein künstliches Material nach J. Pendrys Überlegungen: ***METAMATERIAL***



a) Medium mit $\mu<0$

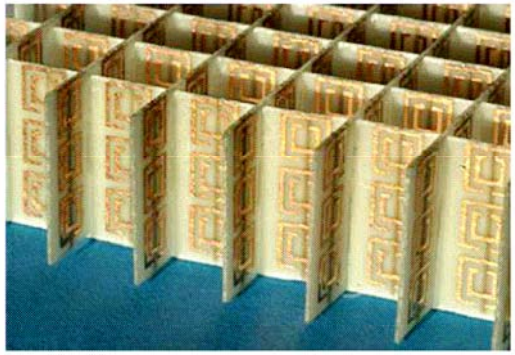


b) Medium mit $\varepsilon<0$

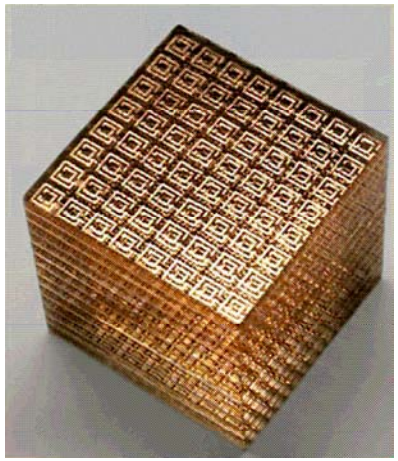


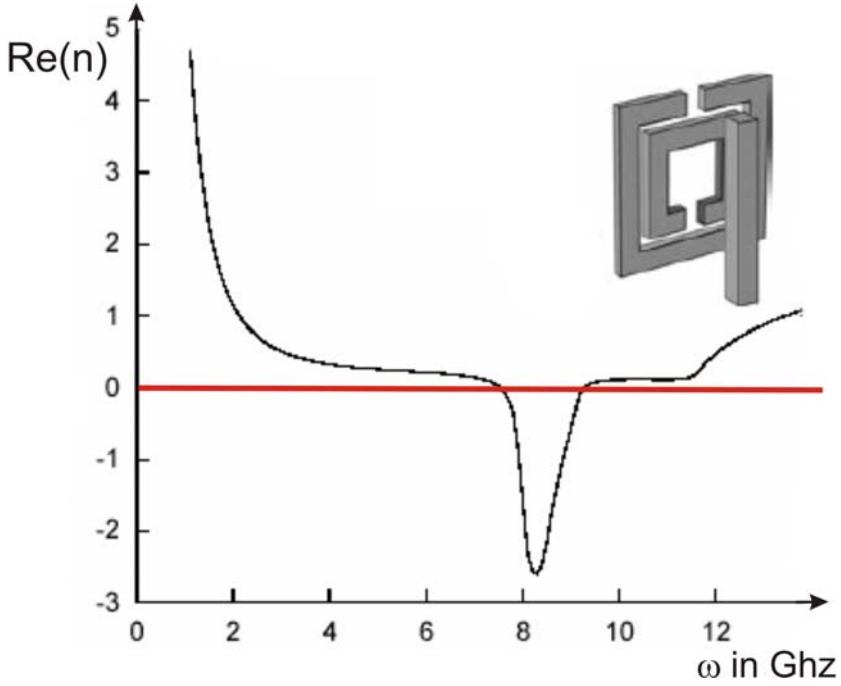
c) Medium mit $\varepsilon,\mu<0$

Herstellung eines „Metamaterial“



1 cm

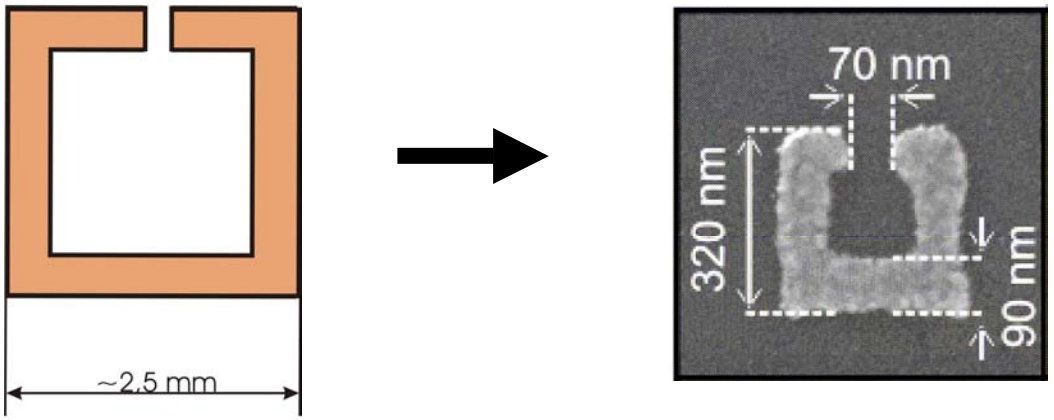




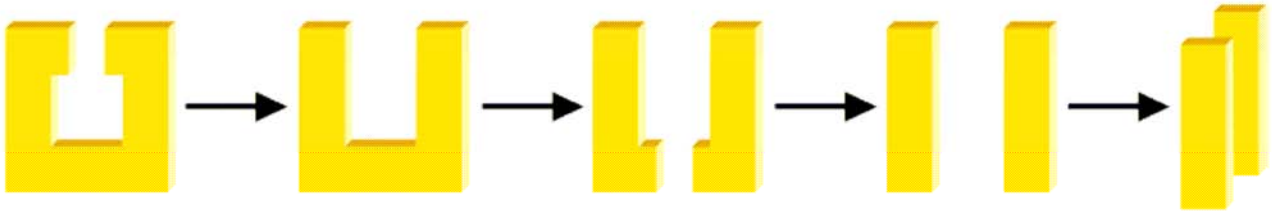
⇨ Erstes Metamaterial mit negativen Brechungsindex im GHz Bereich

Auf den Weg zu höheren Frequenzen:

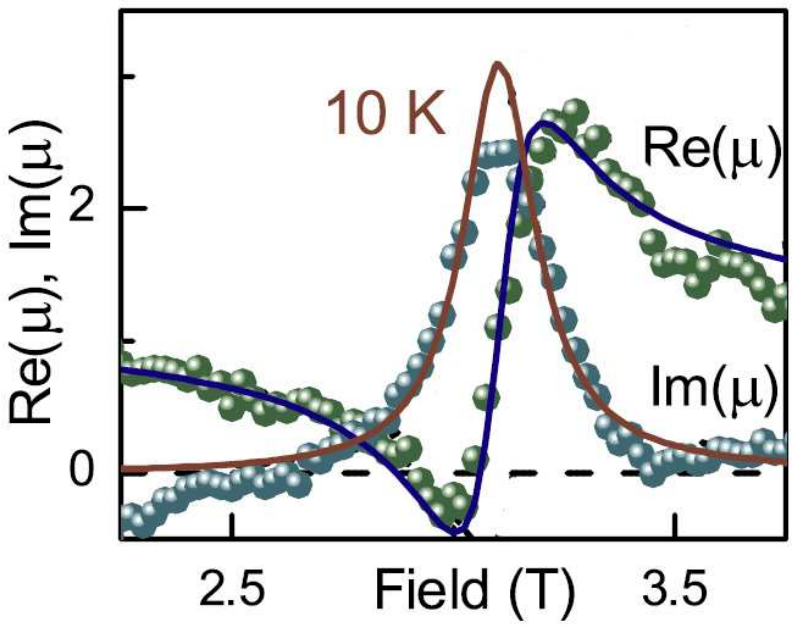
Möglichkeiten: • verkleinern des Resonators (Lithographie)

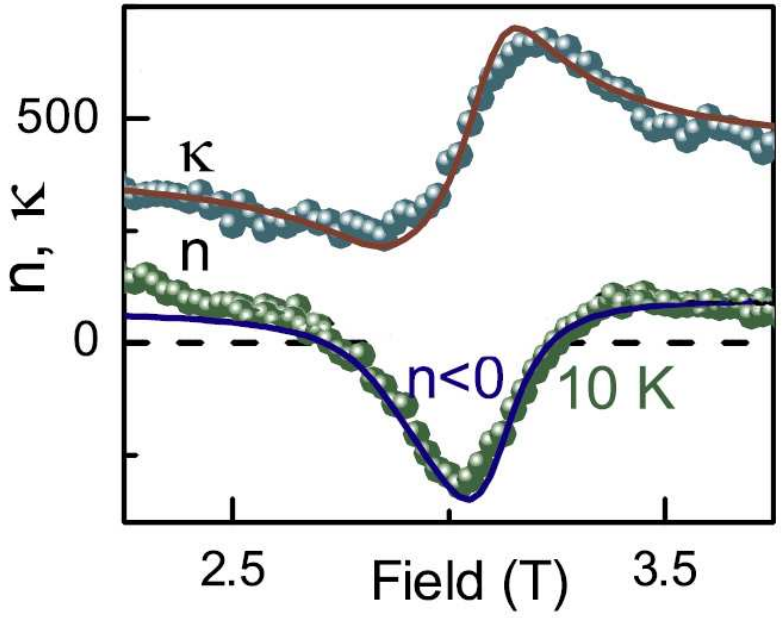


• ändern der Form des Resonators



- Metamaterialien aus Supraleiter-Ferromagnet-Schichten





Probleme auf dem Weg in den optischen Bereich: **physikalische Grenzen!**

Übersicht

1. Einführung: Brechungsindex

2. Theoretische Überlegungen V. Veselago

3. Herstellung von Linkshändigem Material :

   - Realisierung eines Material mit negativem ε
   - Realisierung eines Material mit negativem μ
   - Herstellung eines „Metamaterial“

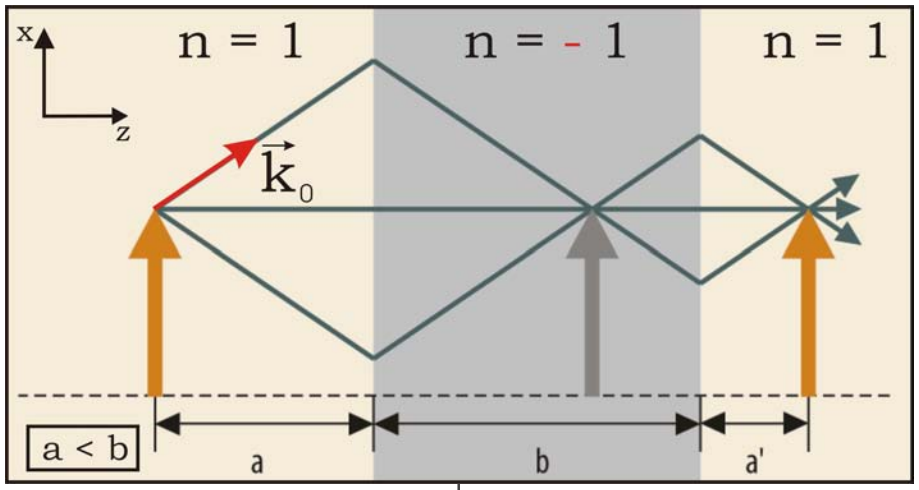
4. Anwendungen

5. Zusammenfassung

Die perfekte Linse

Abbe: Auflösungsvermögen Δ einer Linse: $\Delta \simeq \lambda$
Pendry: Δ nahezu beliebig

Voraussetzungen für die perfekte Linse:
- $|n_1| = |n_2| \Rightarrow$ keine Reflexion
- $a < b$:Bedingung für Fokussierung



elektr. Feld $\vec{E}$ eines Dipol:

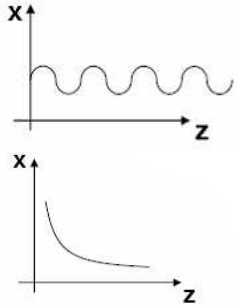
$\vec{E} \propto e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ mit $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$ und $k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

- für $k_x^2 < k_0^2 \Leftrightarrow k_z$ reell $\Rightarrow$ (Max: $k_x^2 = k_0^2$)

$\Rightarrow$ oszil. Welle in z-Richtung: „Fernfeld-Beiträge“

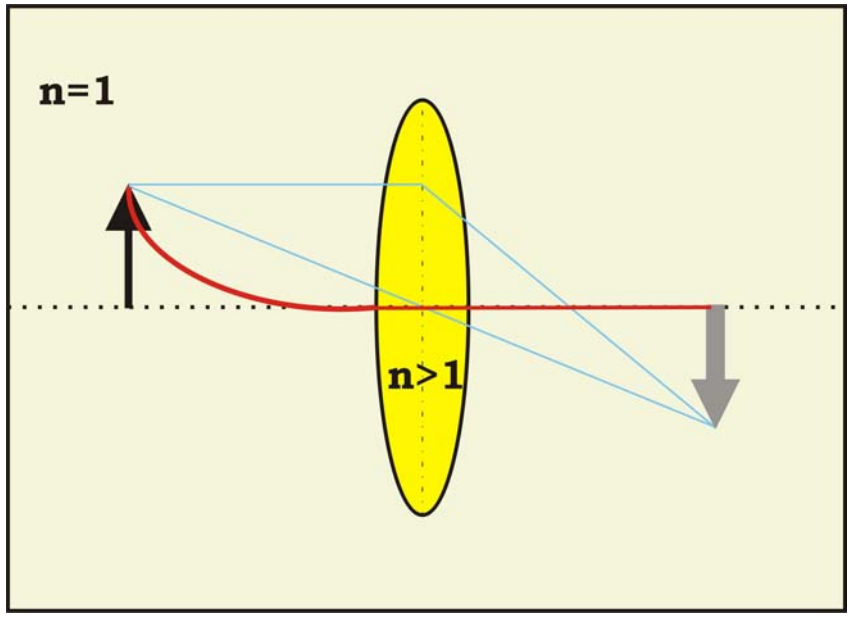
- für $k_x^2 > k_0^2 \Leftrightarrow k_z$ komplex

$\Rightarrow$ exponent. abklingende Welle in z-Richtung: „Nahfeld-Beiträge“

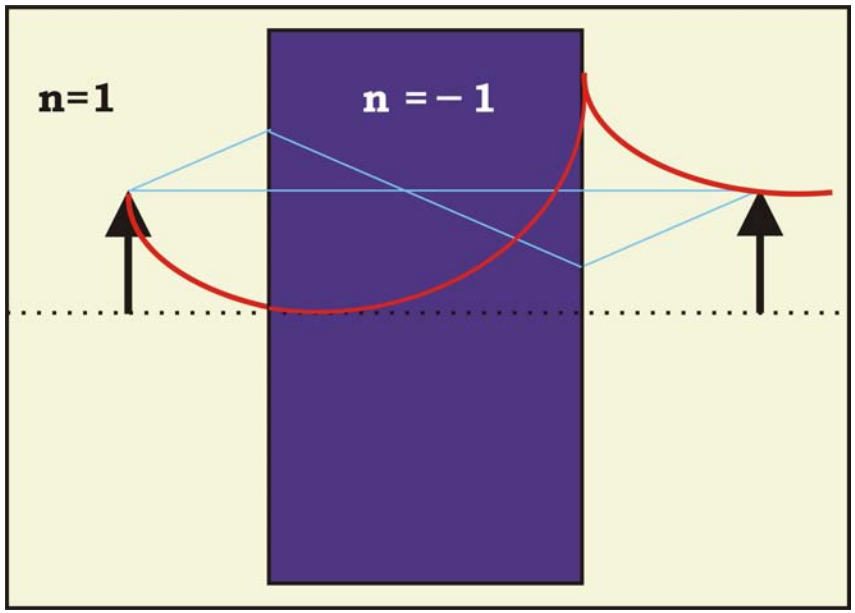


Pendry: Evaneszente Wellen werden im Medium mit n = - 1 verstärkt

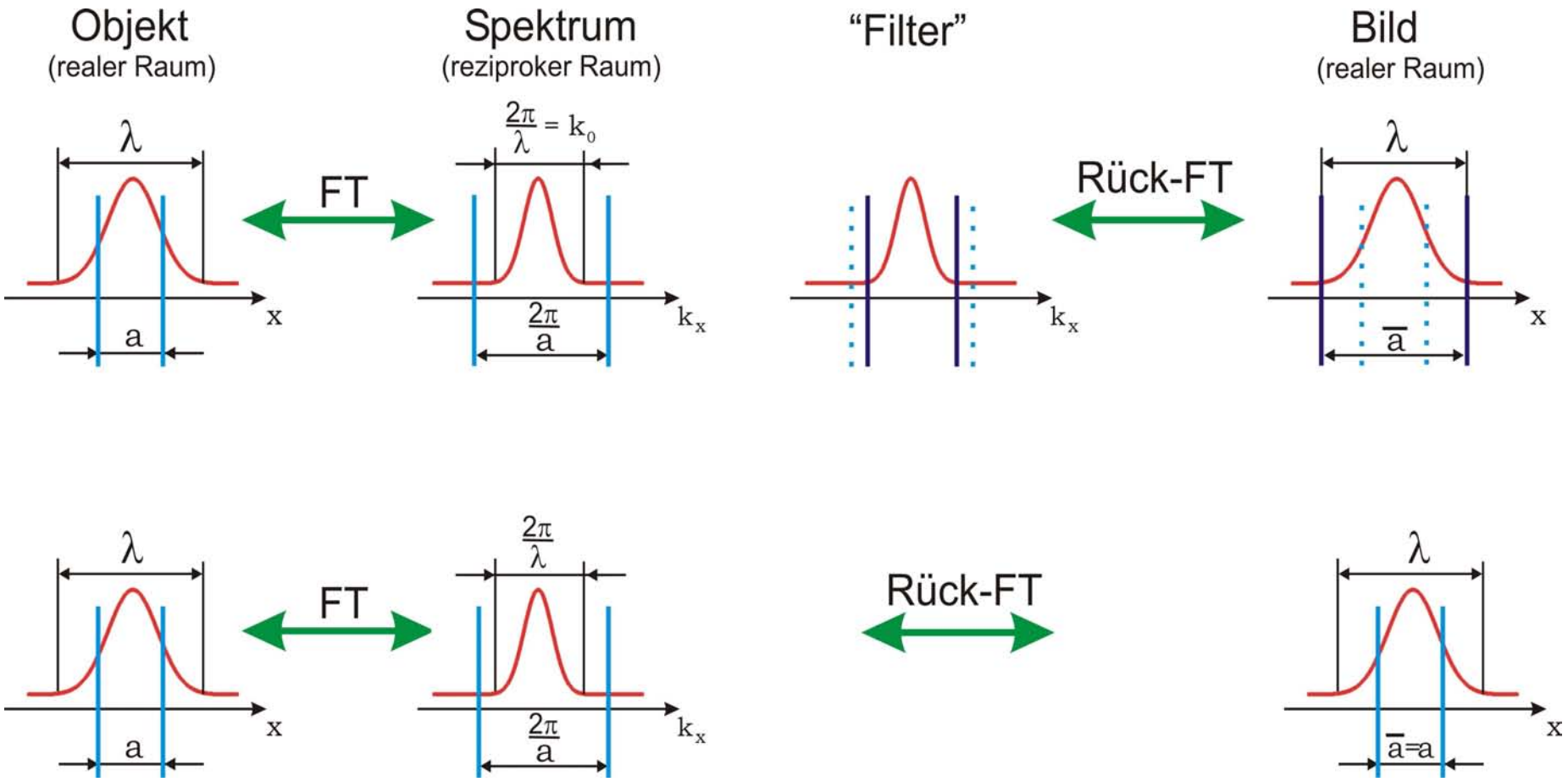
normale Linse



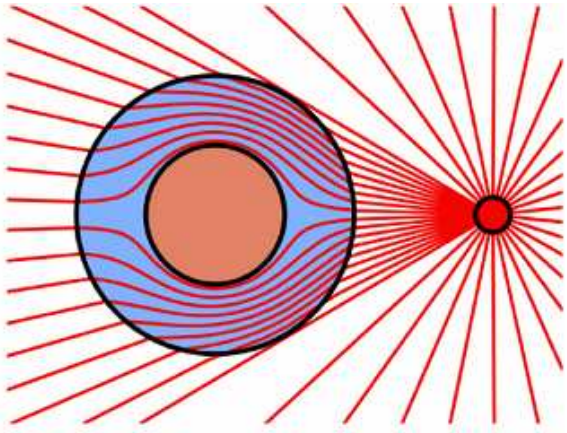
Nahfeldlinse

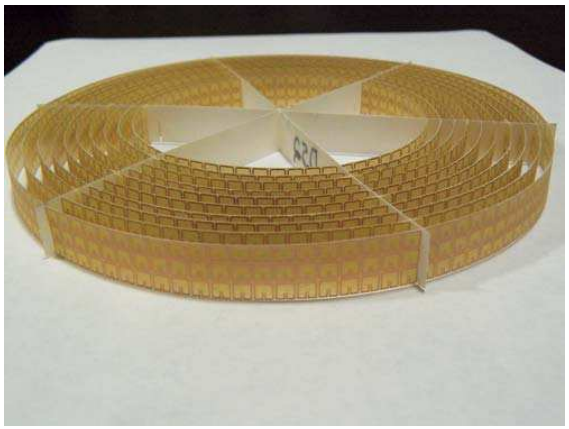


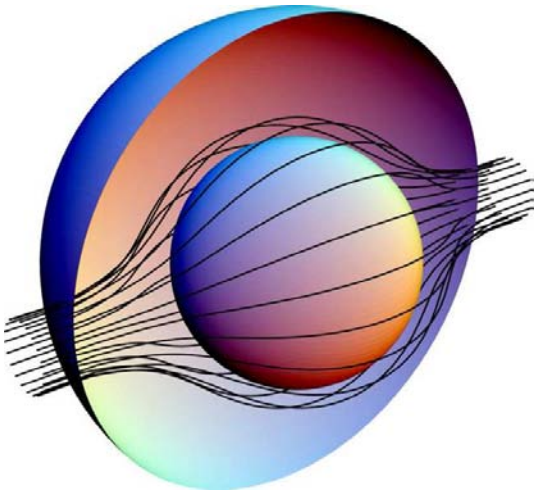
Die perfekte Linse

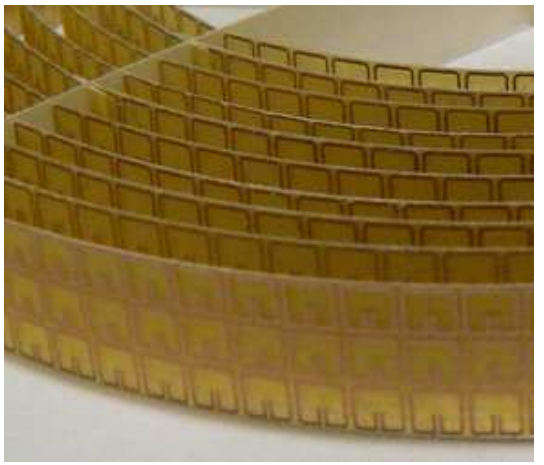


Tarnkappe









Zusammenfassung

- Veselagos aufgegriffenen theoretischen Überlegungen lassen sich tatsächlich auch praktisch realisieren
- Wenn ε und μ gleichzeitig negativ sind, gibt es einen negativen Brechungsindex n
- Durch Kombination von elektrischen und magnetischen Resonatoren lassen sich so genannte Metamaterialien künstlich herstellen
- Metamaterialien können sich für e.m. Wellen so verhalten, als hätten sie einen negativen Brechungsindex
- Es liegt nun an der Qualität der Metamaterialien, welche physikalischen Anwendungen sich tatsächlich realisieren lassen

Quellennachweis

-V.G. Veselago, Sov. Phy. Usp., 10, 509(1968)

-J.B. Pendry, Phy. Rev., 76, 4773(1996)

-J.B. Pendry, Phy. Rev., 85, 3966(2000)

-J.B.Pendry, A.J.Holden, D.J. Robinson, W.J. Stewart, IEEE, 47, 2075(1999)

-D.R.Smith et al., Phy. Rev.,84, 4184(2000)

-R.A. Shelby, D.R. Smith, S. Schultz, Science, 292, 77(2001)

-A.Pimenov, A.Loidl, P. Przyslupski, B. Dabrowski, Phy. Rev., 95, 247009(2005)

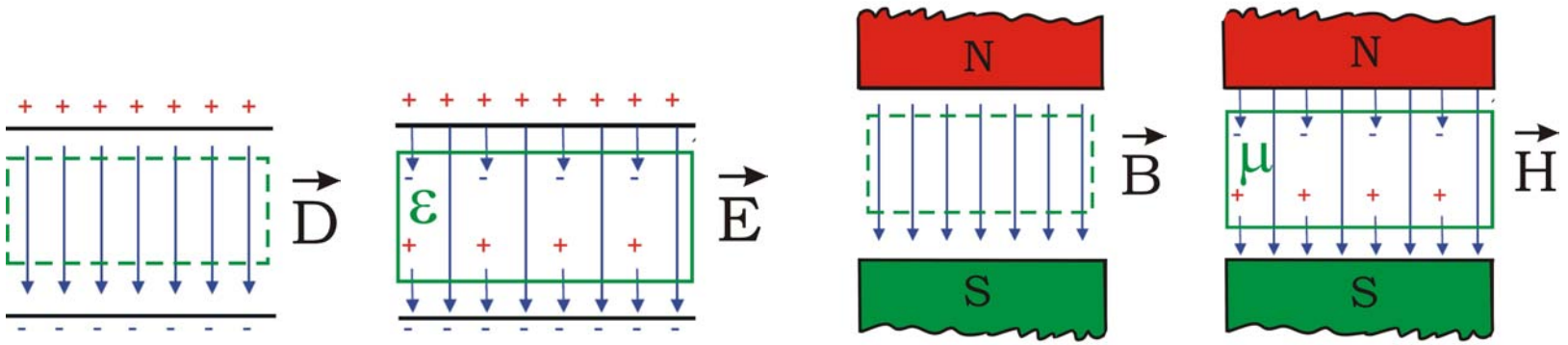
-R. Merlin, Appl. Phys. Lett., 84, 1290(2004)

-J.B. Pendry, D.S. Smith, Phys. Today, (2003)

-E. Shamonina, Phys. Journal, 5, 51(2006)

-M.Wegener, S. Linden, Phys. Journal, 5, 29(2006)

-http://www.google.de

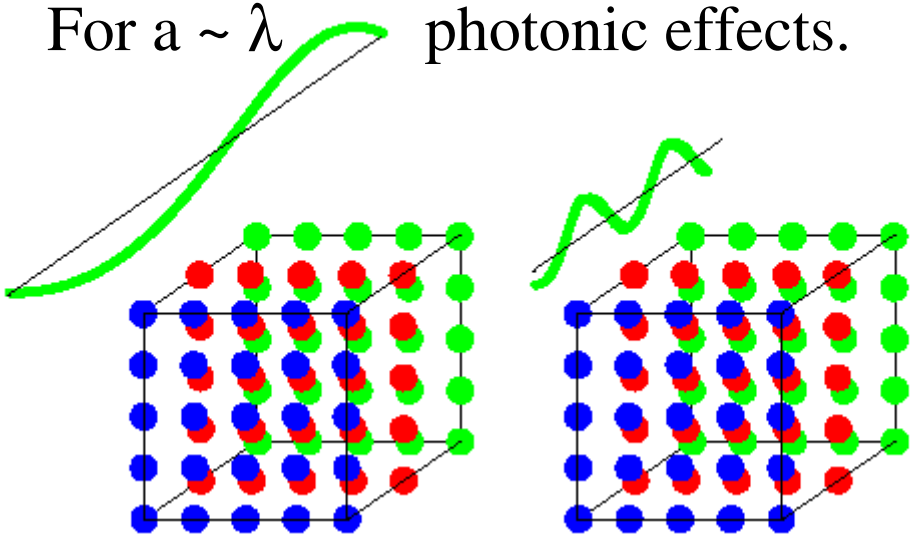

D
ε
E
N
S
B
N
μ
S
H

002 S.3/33

Material properties are determined by the properties of the sub-units plus their spatial distribution.

For a << λ effective medium theory.

For a ~ λ photonic effects.



What about meso-scale materials: bigger than atom but smaller than the wavelength??

Der Versuchsaufbau

- Das LHM-Sample wird in eine Prismenform geschnitten
- Die Mikrowellen treffen senkrecht (von rechts) auf die eine Seite des Prismas auf
- Polaristaion des E-Feldes: parallel zu den Kupferdrähten
- Polarisation des B-Feldes: parallel zur SRR-Achse
- „Brechung" an zweiter Prismenseite

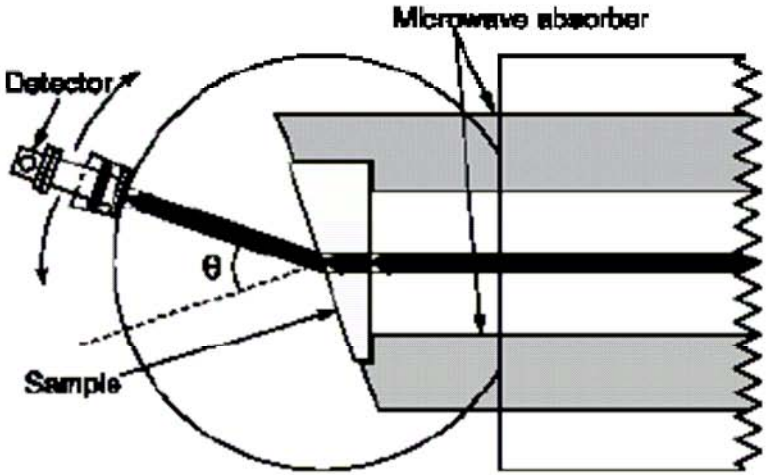


Fig. 10: Versuchsaufbau des Shelby-Experimets

Fig. 9: Im Versuch verwendetes LHM-Sample

- SRRs und Kupferdrähte auf Fiberglas-Trägers aufgebracht
- Anordnung der Einheitszellen (bestehend aus 6 SRRs und 2 Kupferdrähten) zu einem regelmäßigen Gitter
- Gitterkonstante 5mm
- LHM-Charakter in einem Frequenzband von 10.2 –10.8 GHz

Plasmen ($\omega < \omega_p$): $\varepsilon<0$, $\mu>0$
Split Rings: $\varepsilon>0$, $\mu<0$

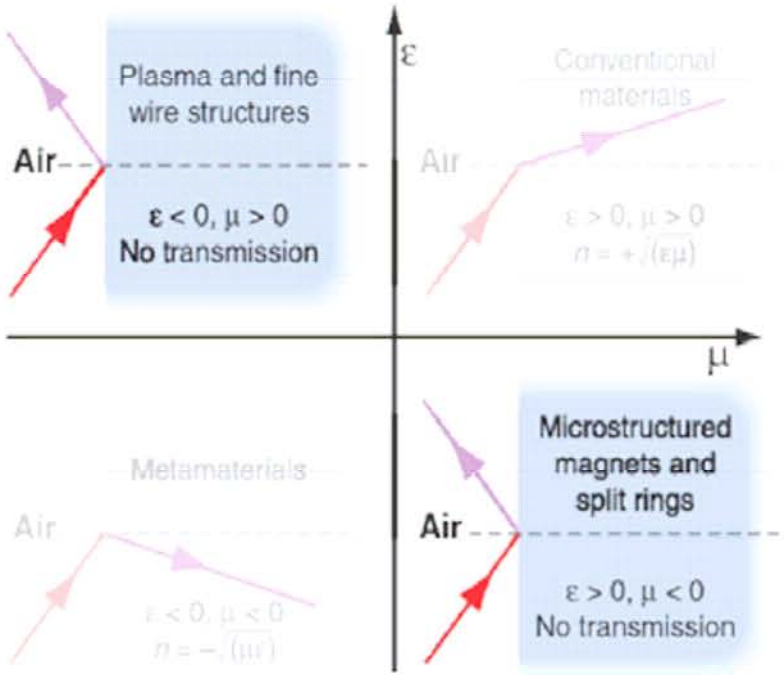
mit

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = i\sqrt{|\varepsilon\mu|}$$ imaginär

und $$\vec{k} = \frac{\vec{\omega}}{c_0} \cdot n$$

$\Rightarrow$ $\vec{k}$ ist imaginär

$\Rightarrow$ keine Wellenausbreitung



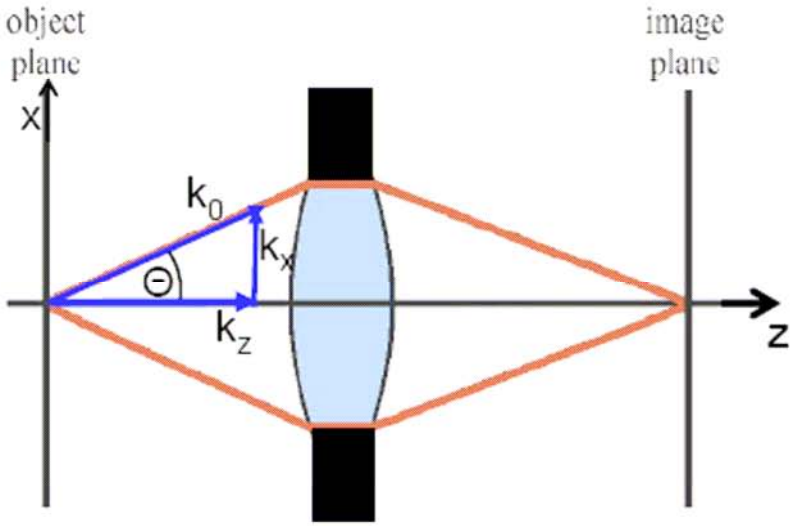
Die Auflösungsgrenze einer konventionellen Linse

Die Beiträge des <u>Fernfeldes</u> zum Bild sind durch die Wellenlänge limitiert.

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$$

<u>Fernfeld:</u> k_z **reell, d.h.** $k_x < k_0$

k_0 **ist Supremum von** k_x **für** $\Theta = 90°$



$$k_x = k_0 \cdot \sin\theta$$

$\Rightarrow$ **Max. Auflösung** $\Delta x \approx \dfrac{2\pi}{\sup(k_x)} = \dfrac{2\pi}{k_0} = \dfrac{2\pi \cdot c}{\omega} = \lambda$

Pendrys Behauptung:

Sub-λ Auflösung wird erreicht durch Verstärkung der evaneszenten Wellen

Die Argumentation:

Bei der konventionellen Linse tragen nur die propagierenden Wellen zur Bildrekonstruktion bei, also k_z nur reell

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - \left(k_x^2 + k_y^2\right)}$$

$$\Rightarrow\ k_x^2 \in \left[0, k_0^2\right]$$

⇒ Max. Auflösung $\Delta \approx \lambda$

Bei der Pendry-Linse sind prop. und evaneszente Wellen für die Bildrekonstruktion verantwortlich, also k_z auch imaginär

$$k_z = i\sqrt{\left(k_x^2 + k_y^2\right) - k_0^2}$$

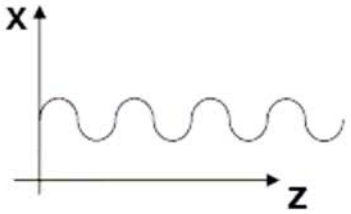
$$\Rightarrow\ k_x^2 \in \left[0, k_0^2\right] \cup \left[k_0^2, \infty\right]$$

⇒ Max. Auflösung Δ □ λ

k_z reell für transversale Wellenvektoren mit $k_x^2 + k_y^2 < k_0^2$

⇒ elektrische Feld besitzt ausbreitungsfähige Moden

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - \left(k_x^2 + k_y^2\right)}$$



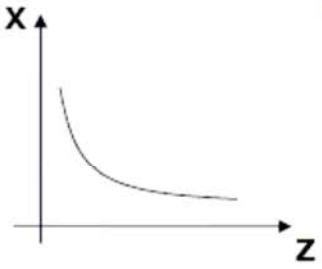
$e^{ik_z z}$

Propagierende Welle

k_z wird imaginär für transversale Wellenvektoren mit $k_x^2 + k_y^2 > k_0^2$

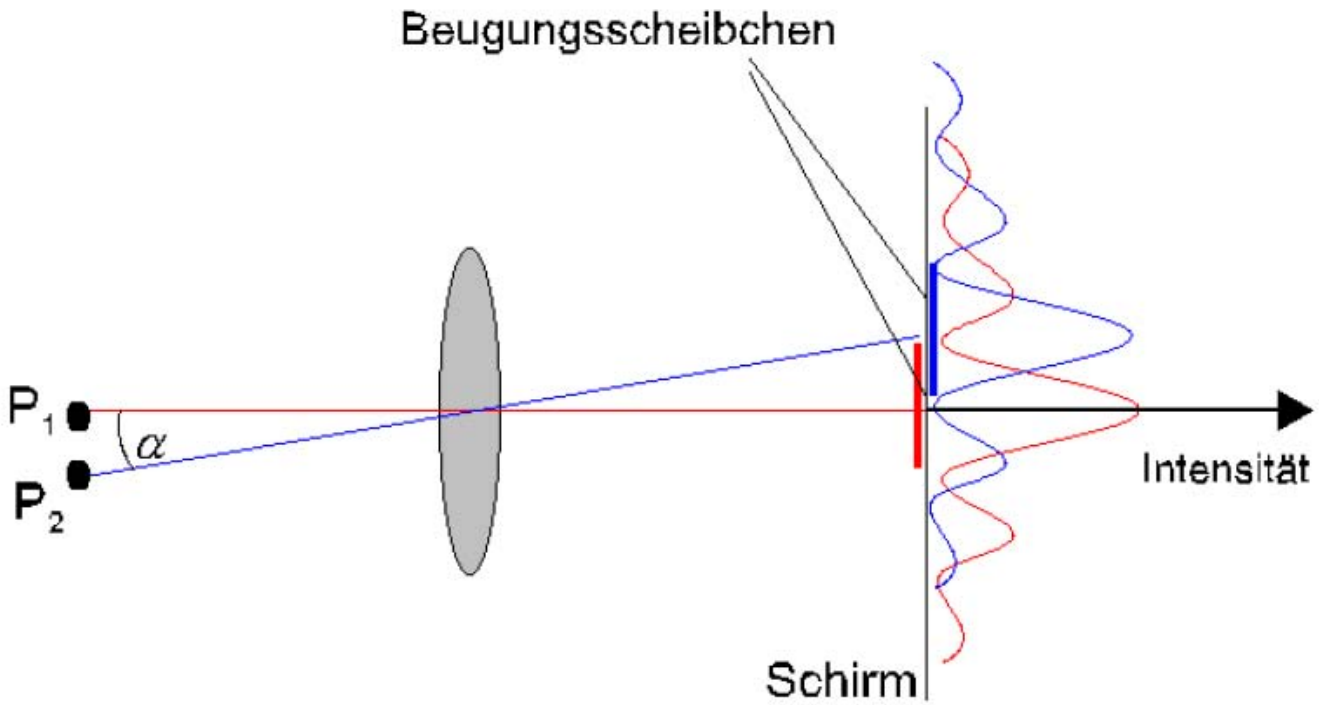
⇒ exponentieller Abfall

$$k_z = +i\underbrace{\sqrt{\left(k_x^2 + k_y^2\right) - k_0^2}}$$



$e^{-\kappa z}$

Evaneszente Welle


Beugungsscheibchen
P1
P2
α
Intensität
Schirm

„Dispersionsrelation“: $k=\omega/c_o= \omega/nc$

Anhang

Anhang

Anhang

Anhang